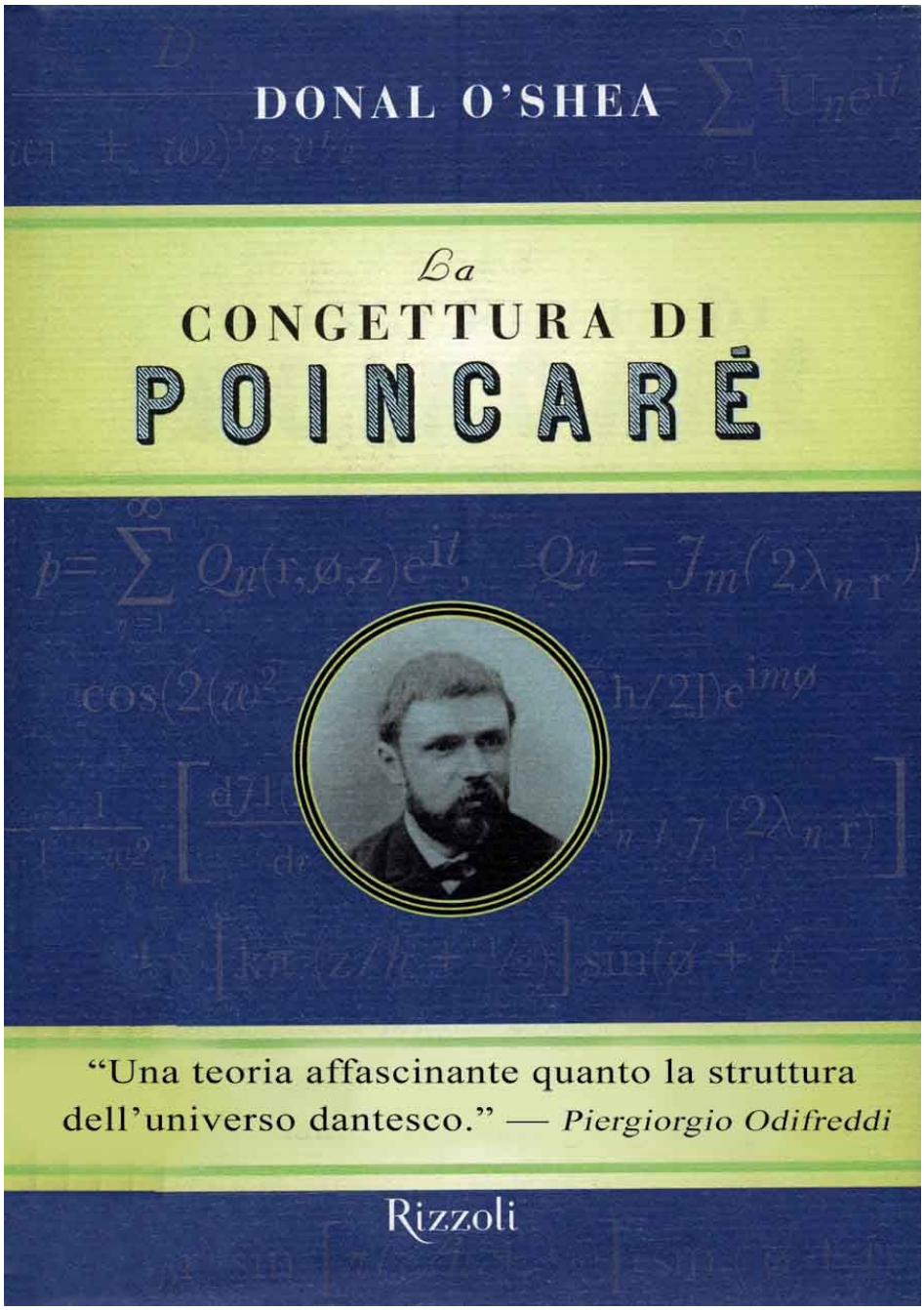
DONAL O'SHEA

LA CONGETTURA DI POINCARÉ

Traduzione di Daniele Didero

Rizzoli



VISIT…

Indice

Prefazione 4

1 Cambridge, aprile 2003 5

2 La forma della Terra 7
La Ionia e i greci 8
Da Pitagora a Colombo 10
La forma del mondo 12

3 Mondi possibili 15
Geometria e topologia 17
Classificazione delle superfici 18

4 La forma dell'universo 23
Universi finiti 24
3-varietà 25
La 3-sfera 26
Ulteriori 3-varietà compatte 28
La congettura di Poincaré 30

5 La geometria di Euclide 32
Gli Elementi 33
Gli Elementi e il rigore 35
La longevità degli Elementi 37

6 I non-euclidei 40
Il quinto postulato 40
La fine del XVIII secolo 43
Gauss, -Lobačevskij, Bolyai 44
Oltre il quinto postulato 46
L'eredità di Euclide 50

7 La lezione di abilitazione di Bernhard Riemann 51
L'epoca di Riemann 51
L'emergere dell'università di ricerca tedesca 53
L'abilitazione 55
Che cosa disse Riemann 56

8 L'eredità di Riemann 59
Sfere e geodetiche 59
Geometria sulle superfici 62
Differenti nozioni di equivalenza 63
I punti principali della lezione di abilitazione di Riemann 66
Le conseguenze della lezione di Riemann 66
Il lato umano di Riemann 69

9 Klein e Poincaré 71
Felix Klein 72
Henri Poincaré 73

10 Gli articoli topologici di Poincaré 80
La geometria naturale di una superficie 80
I grandi articoli topologici 84

11 I grandi studiosi 90
La topologia e la congettura di Poincaré 91
La relatività 93
La Germania e Gottinga 94
La morte di Poincaré 97

12 La congettura diventa famosa 99
La relatività generale 100
La congettura di Poincaré fra le due guerre 101
L'emergere della matematica negli Stati Uniti 102
La scuola russa 104
La Germania dopo la guerra 105

13 Dimensioni superiori 107
Quattro e più dimensioni 107
La congettura tridimensionale di Poincaré 110
Thurston 112
Hamilton e il flusso di Ricci 114
Altri tentativi 117

14 Una soluzione nel nuovo millennio 119
È Perelman l'uomo che aspettavamo? 120
E per quanto riguarda la forma dell'universo? 124
Il premio 125

15 Madrid, agosto 2006 127

Note 131

Archivi 162

Letture consigliate 162

Ringraziamenti 163

Prefazione

Il libro che avete fra le mani è incentrato su un singolo problema. Formulato più di un secolo fa da un brillante matematico francese, Henri Poincaré, esso ha da allora affascinato e tormentato i matematici. Di recente, è stato risolto. La congettura di Poincaré riguarda oggetti che rivestono una centrale importanza per la comprensione di noi stessi e dell'universo in cui viviamo.

La congettura di Poincaré racconta la storia della matematica che sta dietro a questa ipotesi e alla sua dimostrazione. Parte di questa matematica risale al lontano passato, a millenni fa. Di fatto, però, le scoperte dell'ultimo secolo superano in quantità quelle avvenute in tutta la storia precedente.

Per fare un discorso esauriente sulla matematica occorre parlare non solo dei risultati, ma anche delle persone che li hanno ottenuti. Nell'immaginario popolare, l'attività scientifica viene spesso rappresentata nella forma del mito romantico di un genio solitario che combatte strenuamente per strappare il sapere a un universo che di lui non si cura. In effetti, ci sono anche dei singoli individui le cui intuizioni sembrano saltar fuori dal nulla e che da soli hanno fatto progredire questa disciplina di decenni. Ma, per quanto i geni possano essere figure misteriose e pittoresche, il progresso matematico dipende anche da migliaia di altri individui e dalle istituzioni e società in cui essi vivono e lavorano. E il passato a narrarci questa storia più ampia, che va dalla Babilonia di 5000 anni fa fino alla San Pietroburgo e allo Stato di New York di oggi. E un racconto che parla di esplorazioni, guerre, società scientifiche, e dell'emergere dell'università di ricerca in Germania e, più di recente, negli Stati Uniti — tracciando la storia della geometria, della scoperta della geometria non-euclidea e della nascita della topologia e della geometria differenziale attraverso cinque millenni, innumerevoli fasi dell'umanità, dove la ricerca matematica è venuta a intrecciarsi con elementi biografici, culturali e storici. Per alcuni ci sarà troppa matematica e per altri troppo poca, ma la maggior parte delle persone con almeno un diploma di scuola superiore alle spalle saranno in grado di seguire i concetti fondamentali del libro, anche se i punti più sottili sono un po' impegnativi. E possibile comprendere e apprezzare i segreti di questa famosa congettura anche se non si è in grado di «fare i calcoli» in prima persona. Ho fatto ampio ricorso alle note finali per fornire ulteriori dettagli e riferimenti. Potete anche saltarle a cuor leggero, insieme alle sezioni più tecniche. Non c'è nessun esame da superare. Potrete sempre tornarci in seguito, se lo vorrete, per cercare di capire ciò che non vi sembra chiaro. Dopotutto, la congettura di Poincaré ha dato filo da torcere ai migliori matematici del mondo per gli ultimi cent'anni.

Provate a chiedere a un certo numero di persone che idea si siano fatte della matematica. Qualcuno la ama, ma la maggioranza degli individui ne parla in termini non proprio lusinghieri. Alcuni credono di essere congenitamente incapaci di padroneggiarla. Ad altri non piace proprio. E molti, poi, la odiano con quella stessa carica di passione che viene normalmente riservata alle storie d'amore finite male.

Com'è possibile che una materia così piena di bellezza ispiri tali reazioni? L'avversione che alcune persone provano nei suoi confronti sembra trovare la sua radice nella paura. Non mi illudo certo che basterà un solo libro a cambiare la situazione. Tuttavia, se nutrite verso la matematica un sentimento ambivalente, spero che questa lettura vi spinga ad approfondirne la conoscenza, o, se invece già la studiate, che vi induca ad applicarvi con maggiore entusiasmo.

In ogni caso, mi auguro che possiate trovare piacevole scorrere queste pagine almeno quanto per me è stato piacevole scriverle.

1
Cambridge, aprile 2003

In matematica, le rivoluzioni sono eventi silenziosi. Nessuno scontro, nessun clamore. La notizia viene comunicata in qualche trafiletto ben lontano dalle prime pagine. Proprio come quel freddo, umido lunedì pomeriggio del 7 aprile 2003 a Cambridge, in Massachusetts.

L'anfiteatro del Massachusetts Institute of Technology (Mit) era pieno di persone, giovani e meno giovani: c'era gente seduta sul pavimento e nei passaggi laterali, e in molti erano rimasti in piedi in fondo all'aula. Il relatore, il matematico russo Grigori Perelman, indossava un abito scuro spiegazzato e un paio di scarpe da ginnastica e, mentre veniva presentato, camminava nervosamente avanti e indietro. Calvo e barbuto, con un paio di folte sopracciglia e due penetranti occhi neri, provò il microfono ed esordì con una certa esitazione: «Non essendo molto bravo a tenere un discorso lineare, intendo sacrificare la chiarezza alla vivacità dell'esposizione». Il pubblico sorrise, e la conferenza ebbe inizio. Perelman prese un gesso e scrisse sulla lavagna una breve equazione matematica, formulata vent'anni prima.[1] Essa, chiamata «equazione del flusso di Ricci», prende in considerazione la curvatura dello spazio come se una fonte di calore — immaginiamo della lava fusa — irradiasse dalle regioni a curvatura più alta cercando di diffondersi in quelle con una curvatura meno accentuata. Perelman invitò il pubblico a immaginare il nostro universo come un elemento di quel gigantesco insieme matematico astratto formato da tutti gli universi possibili. Reinterpretò quindi l'equazione descrivendo questi potenziali universi come gocce d'acqua che scivolano lungo le pendici di enormi colline, sullo sfondo di un paesaggio immenso. Mentre ognuna delle gocce si muove, la curvatura varia e, in alcune regioni, si avvicina a dei valori fissi. Nella maggior parte dei casi, gli universi sviluppano geometrie gradevoli: in alcuni la normale geometria euclidea che abbiamo studiato a scuola, in altri delle geometrie profondamente diverse. Tuttavia, alcuni dei sentieri che conducono a valle portano con sé dei problemi: gli elementi che li percorrono, cioè, sviluppano regioni matematicamente ostili. Ma non importa, asserì lo studioso, perché possiamo scegliere di allontanarci da tali percorsi. E illustrò brevemente come.

Il pubblico era stato attirato alla conferenza da un articolo che Perelman aveva pubblicato su un sito web qualche mese prima, nel novembre 2002. Nell'ultima sezione di quel contributo, egli aveva descritto a grandi linee un'argomentazione che, se fosse stata valida, avrebbe dimostrato una delle più famose, delle più elusive e delle più splendide congetture matematiche di tutti i tempi. Formulata nel 1904 da Henri Poincaré — il più grande matematico della sua epoca e uno dei più dotati in assoluto —, la «congettura di Poincaré» è un'ardimentosa ipotesi sulla potenziale forma del nostro universo che, prima di essere dimostrata, sarebbe rimasta a lungo una semplice supposizione. Nell'ultimo secolo, quindi, la sfida di dimostrarla (o di confutarla) ha attratto gli esperti come il canto di una sirena, rendendola il più famoso problema non solo della geometria e della topologia ma, probabilmente, dell'intera matematica.[2] Nel maggio 2000, il Clay Institute l'ha designata come uno dei sette problemi del nuovo millennio, offrendo per la sua soluzione un premio di un milione di dollari.[3]

Ben più della metà del pubblico presente in aula aveva presumibilmente cercato di fare qualche passo avanti verso la soluzione della congettura di Poincaré. Tutti — dal trentenne con l'aria da studente e i capelli a spazzola che prendeva appunti in cinese alla biondina con la camicetta attillata e la gonna troppo corta, dallo sportivo con i pantaloncini larghi da corsa e la maglietta sudata all'ottuagenario con gli occhi arrossati e la giacca a spina di pesce macchiata da decenni di polvere di gesso — erano consapevoli di essere i potenziali testimoni della risoluzione di un problema fondamentale nel solco di una tradizione trimillenaria. La matematica che stava alle spalle di questa dimostrazione era stata tramandata scrupolosamente di epoca in epoca, attraverso periodi di grande

ricchezza e altri di terribile povertà, dallo sconosciuto babilonese che aveva scoperto come calcolare l'area di un cerchio, al perfetto rigore di Euclide, al fiorire della geometria e della topologia nel corso degli ultimi due secoli.

Due settimane e diverse conferenze dopo, presso il campus della Stony Brook University (uno dei quattro centri dell'Università dello Stato di New York) si potè assistere a una scena simile. L'auditorium era ancora più affollato e, questa volta, erano presenti anche diversi giornalisti. Ai reporter era giunta voce che Perelman aveva avuto una sorprendente intuizione sulla forma del nostro universo, una scoperta che avrebbe potuto fruttargli un milione di dollari. Avevano inoltre indagato sulla sua carriera misteriosa, su come un decennio prima fosse scomparso dalla scena e su come la sua promettente intelligenza non avesse ancora prodotto tutti i frutti sperati. Un flash illuminò la sala. «No, per favore!» reagì di scatto Perelman, visibilmente irritato.

Al termine del suo intervento, il matematico rispose con pazienza a tutte le domande del pubblico. «Ma quella soluzione esploderà in un tempo finito» disse una voce dal mezzo dell'aula. «Non importa» replicò Perelman «possiamo eliminarla e far ripartire il flusso.» Un attimo di silenzio, seguito da un paio di cenni d'approvazione con il capo. L'auditorio soppesava con cautela ciò che aveva sentito e avrebbe continuato a ponderare le parole di Perelman per i mesi a venire.

Gran parte della matematica invocata da quest'ultimo sarebbe stata inconcepibile anche solo tre decenni prima. Gli strumenti tecnici da lui utilizzati erano all'avanguardia e il loro buon funzionamento dipendeva dal lavoro di diverse persone presenti tra il pubblico. L'atmosfera era tesa. Tutti sapevano quanto fossero delicate e sottili le argomentazioni del conferenziere, e come fosse facile perdersi. Tutti desideravano che il suo ragionamento tenesse. Due professori del dipartimento di matematica dell'Università del Michigan, Bruce Kleiner e John Lott, avevano allestito un sito web con link che conducevano agli scritti di Perelman,[4] e numerosi matematici di tutti i Paesi del mondo erano intervenuti aggiungendo note e argomentazioni per chiarire i punti più oscuri e sviluppare quei passaggi che sembravano troppo succinti.

Quasi ogni studioso del pianeta era in contatto con almeno una persona che stava assistendo alla conferenza ed era in attesa di un resoconto. Due dei presenti, Christina Sormani (una giovane professoressa del Lehmann College) e Yair Minsky (ordinario fresco di nomina a Yale), avrebbero messo online i loro appunti in modo che anche gli altri potessero leggerli.

Come al Mit, anche in questa sede tutte le persone in sala (eccetto i giornalisti) erano coscienti che ciò a cui stavano assistendo era il punto massimo raggiunto dopo un secolo segnato dalla più grande fioritura del pensiero matematico nella storia della nostra specie.

I giornalisti, dal canto loro, erano interessati soprattutto alla faccenda del milione di dollari. Come si sentiva Perelman di fronte alla possibilità di aggiudicarsi una somma di tale entità? Quando si resero conto che la cosa non gli interessava, cambiarono il loro approccio e si misero a scrivere articoli in cui parlavano di un russo solitario che aveva fatto una grande scoperta matematica e che, probabilmente, avrebbe rifiutato il premio. Nei giorni successivi — e durante una serie di sessioni di discussione organizzate in fretta e furia —, Perelman presentò ulteriori dettagli della sua teoria, ma rifiutò sempre di farsi intervistare dalla stampa e, qualche settimana dopo, fece ritorno a San Pietroburgo senza nemmeno rispondere alle offerte di lavoro che gli erano arrivate dalle più grandi università americane.

La dimostrazione della congettura di Poincaré elaborata da Perelman è una delle più grandi scoperte della nostra epoca, in grado di dirci molto sulla possibile natura e sulla forma del nostro universo. L'equazione del flusso di Ricci scritta da Perelman è una lontana parente della formula di Black-Scholes, di cui gli agenti di borsa di tutto il mondo si servono per stabilire i prezzi delle azioni e dei bond. La curvatura, però, è più complicata della temperatura o del denaro. Come vedremo nei capitoli seguenti, la curvatura è un oggetto geometrico che misura la deviazione della somma degli angoli dei triangoli da 180 gradi, la cui descrizione richiede più di un singolo numero, e l'equazione usata da Perelman è un'abbreviazione di sei equazioni fra loro collegate, un trionfo di eleganza, una formula all'apparenza semplice che racchiude sorprendenti ricchezze. La cosa che più le si avvicina è l'«equazione della relatività generale di Einstein» che esprime la curvatura dello spazio.

2
La forma della Terra

La congettura di Poincaré ci offre gli strumenti concettuali e matematici per interrogarci sulla possibile forma dell'universo. Iniziamo però da una questione più semplice, quella della forma della nostra Terra. Ogni bambino delle elementari può affermare che la Terra è come una sfera. E oggi, con aerei e satelliti orbitanti che possono scattare fotografe del nostro pianeta dall'alto, questa affermazione sembra del tutto evidente. In passato, però, era difficile dire con certezza quale fosse la forma del mondo.

«C'è qualcuno talmente insensato da credere che dall'altra parte della Terra ci siano persone con i piedi in direzione opposta rispetto ai nostri, persone che camminano con i talloni all'insù e la testa all'ingiù?» Stando a Washington Irving, un famoso intellettuale americano di metà Ottocento, questa domanda retorica avanzata da un padre della chiesa[1] fu citata, fra le altre, dal consiglio convocato dal re Ferdinando e dalla regina Isabella per valutare la proposta di Cristoforo Colombo di raggiungere le Indie Orientali navigando verso ovest. Irving racconta con emozione come i membri scettici — o apertamente ostili — di questo consiglio, accecati dalla loro fede in una Terra piatta, sfidarono ripetutamente Colombo, che però seppe difendere con risolutezza le proprie idee.[2] Questo ritratto dell'episodio come è presentato da Irving si è affermato ed è stato ripetuto acriticamente di generazione in generazione, ma è un'assurdità — «pure e semplici sciocchezze», come scrisse il celebre storico americano Samuel Eliot Morison.[3]

Nel 1490, infatti, praticamente tutti gli occidentali colti sapevano che la Terra era sferica. C'erano, naturalmente, dei dibattiti sull'esistenza degli abitanti degli antipodi, delle persone che vivevano dall'altro lato del mondo e che non potevano aver conosciuto Cristo o il Profeta. Mancando i dati certi, la fantasia aveva libero sfogo: secondo alcune storie quelle regioni erano spazzate da terrificanti tempeste che ne rendevano impossibile l'attraversamento ed erano popolate da creature mostruose; altre invece sostenevano che agli antipodi ci fosse solo un grande oceano, senza terre emerse e senza abitanti.

Colombo e i consiglieri di Ferdinando e Isabella erano sì in disaccordo, ma il punto del loro dissenso riguardava le dimensioni della Terra, non il fatto — di cui erano tutti convinti — che la sua forma fosse sferica. Comunque, anche se c'erano diverse mappe molto dettagliate di singole parti del mondo (soprattutto del bacino del Mediterraneo), alcune delle quali raccolte in atlanti, nessuno aveva idea di quanto fosse realmente grande il pianeta. Le stime più autorevoli risalivano agli antichi greci. Nel II secolo d.C, Tolomeo aveva stimato che la circonferenza terrestre misurasse circa 29.000 chilometri. I consiglieri di corte dei monarchi spagnoli preferivano però il calcolo di Eratostene, un matematico e geografo greco del III secolo a.C. secondo il quale la circonferenza terrestre misurava circa 39.300 chilometri (un valore che si avvicina molto a quello attuale, pari a 40.009 chilometri).[4] Colombo, invece, riteneva che la Terra fosse ancora più piccola di quanto aveva detto Tolomeo. Erano quindi i consiglieri, e non Colombo, ad avere ragione. Se fossero riusciti a convincere i sovrani, Colombo non avrebbe ricevuto i finanziamenti di cui aveva bisogno, dato che i costi di allestimento per un viaggio più lungo e i maggiori rischi a esso connessi sarebbero stati proibitivi.

Nel corso dei secoli, i giudizi su Colombo hanno oscillato tra quelli positivi e quelli negativi. All'inizio venne acclamato per la sua saggezza, il suo coraggio, la sua lungimiranza, persino per il suo aspetto. Il cinquecentesimo anniversario del suo viaggio, però, ha portato con sé dei giudizi differenti, assai più cupi: Colombo è stato visto come un avido imperialista, come un caparbio, come un uomo semplicemente baciato dalla fortuna. In effetti, l'esploratore fu davvero fortunato a

trovare le Americhe sulla sua rotta. Egli, tuttavia, stava agendo in base alle informazioni allora disponibili. Aveva sentito parlare dei viaggi dei norvegesi e di quelli del navigatore irlandese Brendan. Se costoro avevano veramente raggiunto l'Asia, come allora sembrava ragionevole supporre, significava che Eratostene e Tolomeo si erano entrambi sbagliati. Ciò era senz'altro più ragionevole che ipotizzare l'esistenza di un continente non ancora scoperto fra l'Europa e l'Asia dal momento che erano per giunta stati riscontrati numerosi errori nei dati sui quali Tolomeo aveva fatto affidamento.

Colombo rimase convinto fino alla morte di aver raggiunto le isole delle spezie — le Molucche —, a est dell'India. Sapeva che per raggiungerle circumnavigando l'Africa ci sarebbe voluto un viaggio molto più lungo, e cercava di metter d'accordo questo fatto con quanto aveva direttamente osservato. Scrisse: «Mi sono formulato una mia idea del mondo, e ho scoperto che non è rotondo come lo descrivono, ma che ha la forma come di una pera molto rotonda, eccetto dove si trova il gambo, che è il punto più elevato. Altrimenti si può dire che abbia la forma di una palla molto rotonda su un punto della quale è come se ci fosse un capezzolo di donna, e che questo sia il più alto e il più vicino al cielo».

Questo passo è stato spesso messo in ridicolo, ma io lo trovo molto evocativo.[5] Abbiamo davanti un vecchio che ha creduto e sostenuto per tutta la vita che la Terra fosse una sfera perfettamente rotonda, ma che resta nondimeno aperto ad altre ipotesi che si accordano meglio con i dati a sua disposizione. Forse — sta sostenendo — l'emisfero settentrionale è come la sommità di un frutto, mentre l'emisfero meridionale si allarga e si rigonfia come la parte inferiore di una pera. Forse, quindi, possiamo raggiungere le isole delle spezie in un tempo relativamente breve e con un viaggio molto più corto se, anziché navigare attorno all'Africa nel grande emisfero meridionale, passiamo attorno allo stretto collo dell'emisfero settentrionale. Essere disposti a riesaminare le proprie convinzioni di una vita perché ci si rende conto che sono in contrasto con i dati è una cosa che richiede un enorme coraggio.

Ma a parte le argomentazioni sulla misura della circonferenza terrestre, il fatto è che nel 1490 nessuno poteva realmente dire di sapere se la Terra fosse finita, e men che meno se fosse una sfera. Le uniche cose certe erano che la Terra era curva e che alcune sue grandi regioni erano state mappate. Da dove era nata, quindi, la convinzione che il mondo fosse una sfera, e come si spiegano la sua diffusione e il suo successo?

La Ionia e i greci

La storia di come si giunse ad affermare la sfericità della Terra inizia circa due millenni prima del viaggio di Colombo, sull'isola greca di Samo. Ai tempi di Colombo, Samo era quasi totalmente disabitata. La sua posizione geografica, a circa un chilometro dalla costa occidentale della Turchia, l'aveva resa un facile bersaglio di ogni possibile invasore: bizantini, arabi, veneziani, crociati, turchi. Anche oggi, le sue piccole cittadine tranquille, la sabbia bianca delle spiagge, gli oliveti e i vigneti che fiancheggiano la strada che gira attorno al monte Karvounis o al monte Kerkis, danno più che altro l'impressione di una calda indolenza, di un torpore senza tempo. Se però prendete la macchina o la bicicletta e vi spostate una dozzina di chilometri a sud dell'odierno porto di Samo, raggiungerete la cittadina di Pythagoreion, che prende il nome da Pitagora — il più celebre cittadino dell'isola — e siede sulle rovine parzialmente sepolte dell'antica città di Samo. Alla biforcazione, prendete la strada a sinistra e proseguite lungo la spiaggia. Oltre un'altura c'è una valle con le rovine dell'Heraion, il tempio di Hera, una delle *sette* meraviglie del mondo antico. Tutto ciò che rimane delle 155 colonne che un tempo lo abbellivano è una singola colonna, alta metà delle sue dimensioni originali, che si erge su massicce fondamenta di pietra. Nelle vicinanze si trova il tunnel dell'acquedotto di Eupalino, oggi illuminato e aperto al pubblico. La sensazione della grandezza passata dell'isola soverchia il suo pallido presente.

Proseguendo per un'altra trentina di chilometri oltre le rovine del tempio, sempre lungo la strada principale, vi troverete davanti (a ovest) la cittadina collinare di Marathokampos. Un piccolo

cartello stradale indica un sentiero, da percorrere a piedi, per il monte Kerkis e una caverna dove Pitagora insegnava. Il percorso in salita è moderatamente faticoso e conduce a una grotta ombrosa e spaziosa. Scendete un po', e vi troverete davanti il pendio roccioso del Kerkis e in basso, in lontananza, la distesa del mar Egeo, incredibilmente azzurro. L'isolamento, la bellezza e la solitudine di questo posto richiamano alla mente le isole Skellig irlandesi o le pendici orientali del sacro vulcano Haleakala, sull'isola hawaiana di Maui. In luoghi come questi, il presente si assottiglia e il passato sembra più vicino. Voci ancestrali mormorano appena al di sotto della soglia dell'udito. E qui che Pitagora insegnò per la prima volta che la Terra era una sfera. Il suo spirito è ancora qui, dicono gli abitanti del posto. Nelle notti buie, quando i venti battono contro le pendici del Kerkis, essi raccontano della debole luce che, risplendendo fra le rocce, fa da guida ai marinai.

Quella luce brillava molto più forte 25 secoli fa, nei giorni dello splendore di Samo, allora un'importante città-stato della Ionia. Il territorio di questa regione comprendeva le coste più occidentali della Turchia — o Asia Minore — che si estendevano da Focea (oggi Foça) a Mileto (circa 150 chilometri più a sud), e le isole dell'Egeo più vicine alla terraferma. Stando alla tradizione orale, i greci avevano colonizzato questa regione all'inizio del primo millennio a.C. Fu qui che l'economia e la cultura greche rifiorirono dopo il cosiddetto medioevo ellenico, il periodo —durato quasi 500 anni — di spopolamento, miseria e ignoranza seguito alla violenta e tuttora misteriosa distruzione della civiltà micenea avvenuta nel XII secolo a.C.

L'opera dei poeti ionici Omero ed Esiodo segnò l'inizio della rinascita. La scrittura, basata sull'alfabeto importato dalla Fenicia (l'odierno Libano), venne introdotta verso la fine del IX secolo a.C. e fu subito usata per mettere per iscritto l'epica omerica. Tra il VII e il V secolo a.C. Samo divenne una grande potenza navale e le città-stato ioniche della terraferma importanti e ricchi centri commerciali. La filosofia e la scienza greche nacquero insieme nella Ionia.

Questa posizione geografica, ai margini dell'Asia Minore, diede ai pensatori ionici la possibilità di entrare in contatto con le altre grandi civiltà del Mediterraneo orientale, in particolare quella egiziana. Molto più a est sorgeva la leggendaria Babilonia e, ancora più a oriente, la Persia. I filosofi greci Talete (624-547 a.C.) e Anassimandro (610/609-546 a.C.), entrambi di Mileto, insegnavano che il cosmo e i movimenti delle stelle erano governati da leggi di natura e non dalla magia o dall'intervento arbitrario di esseri divini. Il cosmo era ordinato e poteva essere compreso attraverso la ragione e il pensiero logico. Si trattava di un'idea nuova, un'idea che avrebbe impiegato un po' di tempo per affermarsi e la cui influenza sarebbe cresciuta e calata a seconda dei luoghi e dei tempi.

Talete e Anassimandro avanzarono anche delle ipotesi sulla forma della Terra. Il primo aveva fatto propria la credenza egiziana secondo cui la Terra emergeva come una collina da un mare uniforme e presumibilmente infinito. Il secondo, che aveva riflettuto maggiormente su questo problema, credeva invece che il pianeta avesse la forma di un cilindro e fosse sospeso nello spazio.

L'interesse di Pitagora (570-490 a.C.) per la religione e la mistica era molto superiore a quello dei filosofi ionici. Suo padre Mnesarco, un mercante della ricca città-stato di Tiro, si trasferì dalla Fenicia nella Ionia, dove incontrò e sposò Pitaide di Samo. Stando a un racconto, a Mnesarco venne concessa la cittadinanza a Samo dopo che ebbe rifornito di grano l'isola in un periodo di carestia. Pitagora viaggiò molto assieme a suo padre: visitò l'Italia e la Grecia e una volta, tornando da Tiro, conobbe degli studiosi siriaci e caldei. Era una sorta di ragazzo prodigio e mostrò un precoce interesse per la filosofia, passione che venne alimentata dal suo maestro Ferecide (c. 600-550 a.C.) e da Talete e Anassimandro. Rimase colpito soprattutto dall'ormai vecchio Talete, famoso e rispettato in tutta la Ionia. Negli anni della sua giovinezza, Talete aveva soggiornato per un po' di tempo in Egitto, cosa che incoraggiò Pitagora a fare altrettanto.[6]

Giunto in Egitto, Pitagora riuscì in qualche modo a farsi iniziare ai sacri misteri locali. Perché a uno straniero sia stato permesso di partecipare a questi riti, tenuti gelosamente segreti, non è chiaro, ma tutte le fonti concordano sul fatto che il giovane aveva sulla gamba una voglia di colore oro molto evidente, cosa che forse potrebbe aver spinto i sacerdoti egiziani a credere che questi fosse un prediletto del dio Osiride e a permettergli quindi di unirsi al loro culto. Di certo, la vita di Pitagora fu poi accompagnata da voci secondo le quali egli era in parte divino ed era stato toccato da Osiride,

voci che non sembra lui abbia fatto molto per scoraggiare. I dettagli degli anni trascorsi in Egitto sono ancora più oscuri di quelli del resto della sua vita. Sembra che sia stato catturato, presumibilmente durante l'invasione persiana dell'Egitto nel 525 a.C. e quindi portato come prigioniero a Babilonia, la città più ricca del mondo allora conosciuta. Lì imparò i segreti del dualismo persiano, assimilando gli insegnamenti di Zarathustra (noto ai greci come Zoroastro). A Babilonia Pitagora deve aver appreso anche gran parte delle sue conoscenze matematiche. La matematica babilonese era molto più avanzata di quella egiziana (che da essa appunto discendeva) e, anche se si discute molto di quanta matematica conoscesse Talete, Pitagora ne dominò molta di più e raggiunse un livello di preparazione di gran lunga superiore.[7]

Le circostanze della liberazione di Pitagora da Babilonia ci sono ignote, ma il suo ritorno a Samo non passò comunque inosservato. Oratore affascinante, vestito all'orientale, era un personaggio che faceva decisamente colpo. Nei suoi insegnamenti, l'elemento razionale e quello irrazionale — l'aspetto scientifico e quello mistico — erano strettamente intrecciati, in forte contrasto con la sobrietà della scuola filosofica ionica. La forza di questi dettami pervade ancora oggi la zona, ora disabitata, attorno alla sua caverna di Samo.

Intorno al 530 a.C. Pitagora e un buon numero dei suoi discepoli si trasferirono a Crotone, una tranquilla colonia greca dell'Italia meridionale che era stata fondata quasi due secoli prima e che fu forse il centro di una rinascita religiosa che stava dilagando nell'intera regione. Lì Pitagora fondò la sua scuola. Di fatto, più che altro si trattava di una confraternita; anche tale definizione, però, non è del tutto corretta, visto che questo sodalizio di cercatori di verità era aperto anche alle donne (e non quindi soltanto ai «fratelli»). Noto come «il semicerchio», era formato da un gruppo interno di uomini e donne, i *mathematikoì* vegetariani stretti che vivevano in comune, non avevano proprietà personali e venivano istruiti direttamente dal grande maestro — e da un gruppo esterno, gli *akousmatikoì* («coloro che ascoltano»), che vivevano nelle loro case seguendo regole meno rigide. I membri si sottoponevano a complessi riti d'iniziazione e facevano voto di segretezza.

I pitagorici credevano che, al suo livello più profondo, la realtà fosse matematica, che tutti gli esseri fossero fra loro collegati, che la filosofia potesse essere usata come un mezzo per la purificazione spirituale e che l'anima potesse assurgere all'unione con il divino. La loro idea di una connessione universale e la fusione tra il misticismo orientale e il pensiero greco esercitavano una forte attrazione sui loro contemporanei. Pitagora e i suoi discepoli fiorirono e divennero famosi in tutto il mondo greco. Il tempo ha smorzato i dibattiti che imperversavano intorno al personaggio di Pitagora e ha placato il turbinio di leggende da cui quest'uomo era circondato. Agli occhi dei suoi ammiratori era un genio dalla conoscenza straordinariamente profonda, una persona saggia e compassionevole oltre misura. Per i suoi detrattori, era un ciarlatano dotato di un infallibile istinto di autopromozione. Qualunque sia la verità, Pitagora esercitò un'enorme influenza, e il prestigio della sua confraternita venne addirittura a crescere dopo la sua morte.

La cosa più importante ai fini del nostro discorso, comunque, è che Pitagora affermava che la Terra era sferica. Aveva iniziato ad accumulare prove a sostegno di questa sua idea, ed era stato il primo a concepire il nostro pianeta come un corpo che faceva parte, assieme alle stelle, di un unico universo. Alcuni pitagorici successivi, e in particolare Filolao (c. 470-385 a.C.), abbandonarono anche la concezione di un universo geocentrico, e insegnarono che la Terra, il Sole e le stelle orbitavano tutti attorno a un fuoco centrale a noi invisibile.

Da Pitagora a Colombo

Ma se i pitagorici facevano voto di segretezza, come è possibile che le loro dottrine si siano diffuse e affermate?

La prima cosa da comprendere è che la natura umana non è cambiata molto durante gli ultimi tre millenni. Il mistero ci attrae sempre, e pochi sanno resistere al fascino di un grande sapere tenuto gelosamente segreto. La notorietà dei pitagorici garantiva un solido mercato per quei libri che si proponevano di esporre le loro idee e le loro convinzioni. E ne apparvero molti. Si dice che Filolao

abbia scritto il suo *Sulla natura* perché aveva bisogno di soldi.

Il filosofo greco Platone (427-347 a.C.) fu profondamente influenzato dai pitagorici. Acquistò il libro di Filolao per l'Accademia, la scuola da lui fondata ad Atene. Era anche stato un amico intimo del grande matematico pitagorico Archita (430-360 a.C.). Di conseguenza, molte idee pitagoriche passarono nel sistema di Platone ed entrarono a far parte della corrente predominante del pensiero greco. Il più brillante fra gli studenti dell' Accademia, Aristotele (384-322 a.C.), per quanto fosse meno innamorato dei pitagorici (si dice che li abbia insultati definendoli «sporchi vegetariani»), incluse molte delle loro idee nell'imponente corpo enciclopedico delle sue opere.

L'importanza della figura di Aristotele è enorme, data l'immensità del campo delle sue ricerche intellettuali. Egli codificò le regole della logica formale, organizzò in modo sistematico la filosofa e contribuì a tutte le scienze naturali. Aristotele insegnava che la Terra era una sfera attorno alla quale ruotavano il Sole e la Luna. Le sue opere di etica, estetica e politica vengono lette ancora oggi. Il pensiero medioevale — tanto quello cristiano quanto quello islamico — è radicato nei princìpi aristotelici. Sostenuta dall'autorità di Platone e del suo discepolo, e dalle scoperte che descriverò tra breve, l'idea che la Terra fosse sferica si diffuse e venne ampiamente accettata.

Il ruolo di Aristotele come precettore di Alessandro Magno[8] (che a quei tempi era l'uomo più potente del mondo) contribuì a propagare le idee pitagoriche in modo ancor più decisivo — sebbene meno diretto - dei suoi stessi insegnamenti. Partendo dalla conquista della Grecia, portata a termine da suo padre nel 338 a.C. Alessandro si era mosso per assoggettare l'intero mondo allora conosciuto. Al momento della sua morte, nel 323 a.C. l'impero di Alessandro si estendeva dal Mediterraneo fino all'India.

Anche se non conosciamo nei dettagli la complessità del rapporto fra il precettore e il suo grande allievo, Aristotele invitò senza dubbio Alessandro a sfruttare le sue campagne militari per l'osservazione scientifica. Che l'abbia fatto per accontentare le richieste del suo maestro oppure no, in ogni caso il conquistatore prese effettivamente al suo seguito dei cartografi. Le loro mappe non sopravvissero, ma gli scritti di alcuni suoi generali sì, e i loro racconti e le loro descrizioni divennero le basi per le carte geografiche create nei secoli successivi.

Dopo la morte di Alessandro, il suo impero si divise. La parte più grande andò al suo generale Tolomeo I Sotere, che scelse come propria capitale Alessandria, alla foce del Nilo. Qui — nella prima e più grande delle città che Alessandro Magno aveva fondato dando loro il proprio nome — Tolomeo iniziò la costruzione di quella leggendaria biblioteca che avrebbe assicurato al luogo la posizione di capitale intellettuale e culturale del mondo. Gli studiosi accorrevano in massa alla grande biblioteca, bramosi di svolgere le loro ricerche grazie a una collezione che contava centinaia di migliaia di libri e rotoli. La posizione di capo bibliotecario era forse la più alta carica accademica del mondo antico, in grado di rivaleggiare facilmente con la guida dell'Accademia di Platone ad Atene; volendo fare un paragone con la situazione odierna, era un po' come essere il rettore dell'Università di Harvard o di Cambridge.

Eratostene (c. 275-195 a.C.) di Cirene (oggi Shahat, in Libia) divenne il terzo capo bibliotecario in ordine di tempo, nel 235 a.C. durante il regno di Tolomeo II. Oltre a essere un geografo, Eratostene — che aveva studiato ad Atene — era un critico letterario, e si dedicava anche alla matematica, all'astronomia e alla filosofia. Non aveva dubbi sul fatto che il mondo — di cui disegnò anche una mappa — fosse una sfera: se uno partisse dalla Spagna e continuasse a navigare verso ovest — scrisse —, alla fine raggiungerebbe l'India.

Egli affermò inoltre (e fu la sua osservazione più famosa) che due individui posti parallelamente a molti chilometri di distanza, l'uno a nord dell'altro, vedrebbero il Sole a una diversa altezza sull'orizzonte nel medesimo momento della giornata e che, assumendo che il mondo sia una sfera, si potrebbe sfruttare questa differenza angolare per calcolarne la circonferenza. Eratostene misurò la differenza fra l'altezza angolare del Sole ad Alessandria e presso l'odierna Assuan (circa 785 chilometri più a sud, lungo il Nilo), arrivando cosi a quella stima sorprendentemente accurata del valore della circonferenza terrestre che sarebbe poi stata ripresa da alcuni dei detrattori di Colombo alla corte spagnola. Qualche decennio dopo, Ipparco (190-120 a.C.) elaborò il sistema di misurazione basato su latitudine e longitudine, dividendo il mondo in 360 gradi.

Alessandria continuò a essere la patria di geografi, matematici e astronomi anche molto tempo dopo la distruzione della grande biblioteca.[9] Il più grande di questi studiosi fu Claudio Tolomeo (85-165 d.C). La sua *Geografia* era un'opera eccezionale: un libro che riuniva tutte le precedenti conoscenze, che godeva di un'assoluta autorevolezza e che divenne un punto di riferimento imprescindibile. Tolomeo affrontò il problema di come rappresentare una Terra curva su un foglio di carta piatto e si occupò delle possibili proiezioni di una sfera su un piano. Egli sottolineò che, una volta assegnate le coordinate (in questo caso, latitudine e longitudine) ai diversi punti da rappresentare sulla carta, era possibile ricostruire le mappe senza problemi. Usando gli scritti dei generali di Alessandro che erano stati conservati e i dati acquisiti da altri viaggiatori, Tolomeo calcolò latitudine e longitudine di ogni località conosciuta.

Le mappe incluse nell'edizione originale della *Geografa* di Tolomeo sono andate perdute. Ciò, tuttavia, non ha grande importanza. Il testo è infatti assolutamente limpido e può essere letto con profitto anche oggi.[10] Nel complesso, Tolomeo immaginava che la parte abitabile della Terra — dalle coste dell'Europa occidentale all'India e oltre — corrispondesse a circa la metà dell'intero pianeta. Secondo le sue stime, la circonferenza terrestre misurava circa 29.000 chilometri — parecchio meno del valore indicato da Eratostene, ma più di quello fatto proprio da Colombo.

La *Geografia* di Tolomeo rimase a lungo in gran parte dimenticata e per molto tempo gli unici a occuparsene furono gli scienziati musulmani. A Palermo, presso la corte multiculturale del re normanno Ruggero II, al-Idrisi (c. 1100-1165) si servì di una traduzione araba della grande opera e apportò alcuni miglioramenti ai calcoli di Tolomeo. Il testo originale greco era andato perduto e venne riscoperto solo quando un monaco bizantino, Massimo Planude (c. 1260-1330), ne trovò una copia manoscritta priva delle mappe. Planude ridisegnò alcune carte geografiche e commissionò la ricostruzione di altre. Nel 1406, il testo venne tradotto in latino e un frate benedettino, Nicola Germano, ridisegnò le mappe usando una proiezione trapezoidale, una delle tre proposte da Tolomeo.[11] Questa edizione divenne la base del primo atlante tolemaico stampato, pubblicato nel 1477 a Bologna in un'edizione di 500 copie. Colombo ne possedeva una e la studiò attentamente.

L'idea pitagorica della sfericità della Terra, passata attraverso Platone, Aristotele, i geografi alessandrini, la Sicilia e il mondo medioevale, era così riuscita ad arrivare fino all'epoca moderna. Ai tempi di Colombo, praticamente tutti erano convinti che la Terra fosse sferica. Le prove a sostegno di questa convinzione erano preponderanti. Osservando il Sole da punti diversi dello stesso meridiano, esso si presentava ad altezze differenti. Quando una nave compariva all'orizzonte, si vedevano prima le vele e poi lo scafo. L'assunzione che la Terra fosse una sfera rendeva più comprensibili le maree, il giorno e la notte, le fasi lunari e molti altri fenomeni naturali.

La forma del mondo

Essere *convinti di* qualcosa è un conto, ma quando siamo giunti realmente a *sapere,* al di là di ogni dubbio, che il mondo ha una forma sferica? Già Colombo aveva sollevato qualche dubbio sulla teoria della sfericità, iniziando a pensare che la Terra fosse fatta a pera. Oggi sappiamo che il nostro pianeta non è una sfera perfettamente rotonda, ma è un po' schiacciato ai poli. Ma, come vedremo ora, ci sono anche altre possibilità ben più radicali: il problema della forma della Terra è molto di più di una semplice questione di protuberanze e regioni appiattite.

Prima che potessimo arrivare a conoscere con certezza la forma del mondo furono necessari i viaggi di esplorazione e la precisa trasposizione cartografica di tutte le regioni. I due secoli successivi al viaggio di Colombo videro la pubblicazione di atlanti di aree terrestri sempre più ampie, che sono stati fra i libri più preziosi e ricercati di tutti i tempi. L'atlante di Tolomeo usato da Colombo venne ripubblicato a Roma nel 1508 da Bernardino Veneto de Vitalibus. Questa fu la prima edizione a includere i viaggi europei nel Nuovo Mondo e attorno al Capo di Buona Speranza. La mappa della Terra comprendeva ora una piccola America.

Nel 1511, il veneziano Jacopo Penzio ripubblicò l'opera di Tolomeo con il titolo di *Liber Geographiae;* il testo, affiancato da 28 tavole, era stato diligentemente curato da Bernardo Silvano

di Eboli. Abramo Ortelio, geografo del re Filippo II di Spagna, pubblicò il suo *Theatrum Orbis Terrarum* nel 1570. L'opera avrebbe avuto molte riedizioni, ma restavano ampi spazi vuoti dove non c'era nulla di conosciuto, e le scale erano tremendamente imprecise.

Un amico di Ortelio, il belga Gerardo Mercatore di Rupelmonde — il più grande geografo dai tempi di Tolomeo —, rivoluzionò la cartografia introducendo una tecnica di proiezione (oggi nota come proiezione di Mercatore) che consentiva ai marinai di tracciare delle rotte che tagliavano i meridiani a un angolo costante. Gli atlanti basati sul suo lavoro (e sulle continue spedizioni degli esploratori europei) iniziarono ad apparire ad Amsterdam verso la fine del XVI secolo. Di fatto, lo stesso termine «atlante» per indicare una collezione di carte geografiche trae origine dall'abitudine di Mercatore di far precedere le sue raccolte di mappe da un'immagine della figura mitologica greca di Atlante, raffigurato nell'atto di sostenere il mondo sulle proprie spalle.

Il libro più famoso — e più caro — stampato nel XVII secolo fu l'*Atlas Maior* di Giovanni Blaeu, pubblicato in più volumi e in quattro lingue nel 1662-63. Per quanto splendido, conteneva comunque molte imprecisioni (alcune imperdonabili, anche a quel tempo) e lacune.

Anche se sembrava altamente improbabile che la superficie del mondo si estendesse all'infinito — o, peggio, che terminasse bruscamente da qualche parte —, non fu possibile esser certi della falsità di queste due ipotesi fino al 1522, quando la spedizione di Magellano fece ritorno dal suo viaggio attorno al mondo.[12] E anche dopo questa avventura esplorativa, non era comunque del tutto chiaro se la Terra fosse davvero una sfera. C'erano infatti anche altre possibilità.

Oggi ciò potrebbe sembrare ridicolo, ma lo è veramente? La straordinaria mappa del mondo realizzata da Battista Agnese nel 1546 riporta il tragitto seguito dalla spedizione di Magellano. Il geografo pensava chiaramente che il mondo fosse sferico. E oggi, mentre guardiamo questa mappa, ci diciamo senz'altro che tutti i punti sul margine superiore convergono in un singolo punto (il Polo Nord) e quelli sul margine inferiore in un altro singolo punto (il Polo Sud). Inoltre, ogni punto sul margine destro corrisponde a un punto (quello con la medesima latitudine) sul margine sinistro. Gli osservatori moderni sanno che questo è il modo «giusto» di interpretare la mappa di Agnese e le altre simili, poiché il mondo è stato esplorato e tutti sappiamo che determinate aree sono occupate da terre — o distese d'acqua — continue. Ma ai tempi di Agnese, quando c'erano ancora immensi territori inesplorati, era anche lecito pensare che fosse possibile superare il margine settentrionale (quello superiore) della mappa e riapparire sul margine meridionale (quello inferiore). O, magari, che si potesse continuare a viaggiare per sempre verso nord (o verso sud) senza mai tornare indietro.

Oppure proviamo a immaginare la rappresentazione bidimensionale del nostro mondo se incollassimo il margine destro a quello sinistro e il margine superiore a quello inferiore. Che cosa otterremo? Come ci mostra lo schema riportato nella figura 1, quando incolliamo il margine superiore di un rettangolo al suo margine inferiore otteniamo un cilindro. Incollare assieme il margine sinistro e quello destro significherà poi congiungere i due cerchi situati alle estremità sinistra e destra del cilindro, cosa che ci porterà a ottenere la superficie di una ciambella. Tale superficie è chiamata «toro».

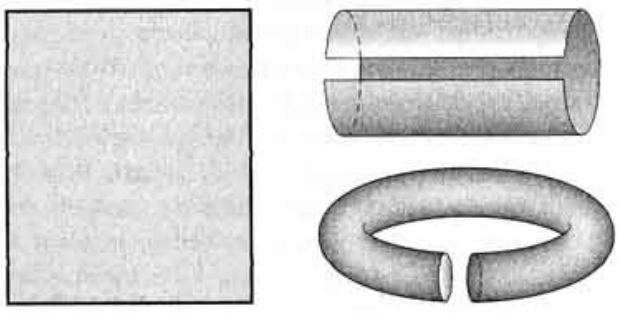


Figura 1: Congiungendo il margine superiore e quello inferiore del rettangolo sulla sinistra otteniamo il cilindro in alto a destra. Congiungendo quindi il margine destro e quello sinistro del cilindro, otteniamo un toro.

Qualcuno potrebbe obiettare che è impossibile che il nostro mondo assomigli a un toro. Se uno

vivesse sulla superficie dell'anello interno (quello adiacente al buco della ciambella), non dovrebbe infatti vedere la superficie opposta stagliarsi nello spazio? Forse sì. Ma se il mondo fosse enorme? O se l'anello interno corrispondesse alle regioni polari della mappa del mondo? Ai tempi di Colombo, come avremmo potuto escludere questa possibilità? Magellano potrebbe anche aver circumnavigato l'anello interno di un toro oppure, magari, quello esterno.

Pertanto, la conclusione è che non era possibile conoscere con certezza la forma del nostro mondo prima di aver tracciato con precisione le mappe di tutte le sue regioni, compresi i poli. E le mappe dei poli, così come quelle delle parti interne di alcuni continenti, sono state tracciate soltanto nel XIX secolo.

3
Mondi possibili

Le opere divulgative pongono spesso l'accento sull'ossessione della matematica per la certezza, per le dimostrazioni. E spesso gli stessi matematici raccontano barzellette che prendono in giro questa loro insistenza sulla precisione. Tuttavia, la ricerca della precisione non è certo fine a se *stessa.* L'esattezza ci permette di ragionare assennatamente su oggetti che non appartengono al campo dell'esperienza ordinaria. E uno strumento per esplorare le possibilità, per indagare ciò che potrebbe essere e non solo ciò che è.

La discussione che abbiamo affrontato nel precedente capitolo formulava la possibilità che il mondo fosse un toro. Dato che quando solleviamo gli occhi al cielo non ci troviamo di fronte nessun oggetto a forma di ciambella, occorre una certa apertura alle possibilità per esser disposti a ipotizzare che la Terra abbia un tale aspetto. Oggi possiamo decollare dal nostro pianeta e fotografarlo da un satellite o da uno shuttle. Nell'era precedente a quella dei voli spaziali, però, occorreva un notevole sforzo di immaginazione per vedere la Luna e il Sole come sfere anziché come quei dischi piatti che ci troviamo davanti quando guardiamo in cielo. Gli altri pianeti e le stelle, poi, ci appaiono come semplici puntini luminosi. Ma invece di discutere sulla volta celeste, proviamo ora a supporre di non poter vedere nulla al di là della Terra. Immaginiamo, per esempio, di vivere su un pianeta come Venere, perennemente coperto da una coltre di nubi. Che forma potrebbe avere il nostro pianeta? Potrebbe essere qualcosa di diverso da una sfera o da un toro?

In questo caso, le domande risultano pregiudicate dal fatto che ci chiedono di figurarci dei pianeti con forme che — in base alle nostre conoscenze — sappiamo essere «sbagliate»; tuttavia, è una caratteristica della matematica che simili sforzi di immaginazione conducano più e più volte a nuove idee e nuove elaborazioni che, in seguito, dimostrano di essere proprio ciò di cui c'è bisogno per compiere un qualche grande passo avanti nella conoscenza scientifica.

Per poter proseguire, dobbiamo adottare una terminologia chiara e priva di ambiguità. La nozione più importante per la nostra indagine sarà quella di una «varietà bidimensionale», o «superficie». Arriviamo a questa nozione pensando alle possibili forme che un mondo potrebbe avere, ed è relativamente innocuo immaginare le varietà bidimensionali come dei modelli di mondi sui quali potremmo vivere. In particolare, stabiliamo che una varietà bidimensionale o superficie è un oggetto matematico le cui aree possono essere rappresentate su una mappa disegnata su un foglio di carta. Il termine «bidimensionale» si riferisce al fatto che dato un qualunque punto di un tale oggetto, i punti a esso vicini possono essere espressi in termini di due direzioni indipendenti. Ciò è di particolare importanza, poiché la cartografia richiede la possibilità di determinare la relazione tra i diversi punti: le mappe e i fogli di carta su cui vengono rappresentati i punti del mondo sono, pertanto, bidimensionali. Una raccolta di mappe che copre l'intera superficie, così che ogni punto della superficie sia rappresentato su almeno una delle mappe, è detta un «atlante». Una varietà bidimensionale o superficie, quindi, è un oggetto rappresentato da un atlante.

Alcune osservazioni, in ordine. In primo luogo, le varietà bidimensionali sono oggetti matematici che costituiscono delle idealizzazioni della realtà fisica. Quando diciamo che la Terra *è* sferica, stiamo asserendo che quel determinato oggetto matematico che è la sfera costituisce un buon modello della superficie della Terra. Si noti, tra parentesi, che quando parliamo di una sfera intendiamo lo strato esterno, o superficie, di una palla, senza includere tutto il materiale che questa sfera racchiude. Così, quando diciamo che la Terra è una sfera, stiamo escludendo il basamento roccioso e il magma presenti al di sotto della crosta. Analogamente, un toro è qualunque varietà bidimensionale che costituisce il modello della superficie o strato esterno di una ciambella, senza

includere l'interno. La precisione in più che guadagniamo ponendo accurate definizioni lascia però spazio ad alcuni oggetti particolari, e dobbiamo fare attenzione a non confondere le considerazioni fisiche con quelle matematiche. Per noi, una varietà bidimensionale è un insieme che gode della proprietà per cui tutti i punti situati intorno a un punto qualsiasi possono essere rappresentati su una mappa. Tutto qui. I matematici usano il termine «superficie» come sinonimo di «varietà bidimensionale», anche se non ogni varietà bidimensionale è la superficie di un qualche solido.[1] Inoltre, su una varietà non è nemmeno sempre possibile distinguere coerentemente destra e sinistra.[2] Comunque, è dimostrabile che ogni varietà bidimensionale su cui è possibile distinguere coerentemente destra e sinistra può essere rappresentata come la superficie di un qualche solido, e viceversa. Le varietà bidimensionali di questo tipo sono dette «orientabili».[3]

Un'altra cosa fondamentale da tenere a mente è l'uso del termine «dimensione». Nella terminologia impropria del nostro linguaggio quotidiano, capita spesso di sentire affermazioni come quelle secondo cui la Terra (o una sfera, o un toro) è tridimensionale perché per contenerla è necessario prendere uno spazio tridimensionale. Noi non useremo *mai* tale termine in questo senso dal momento che per noi esso si riferisce al numero di direzioni indipendenti necessarie per rappresentare tutti i punti su un oggetto situati intorno a un punto dato. Se cercassimo di incollare assieme tutte le mappe di un atlante per formare una sorta di globo che possa rappresentare la superficie in modo più olistico, avremmo certo bisogno di una terza dimensione (o anche di più); ciononostante, continuiamo a dire che la varietà o superficie è bidimensionale. La dimensione si riferisce al numero di direzioni indipendenti di cui farebbe esperienza un'eventuale persona che vivesse sulla varietà in questione, e non al numero di dimensioni di cui abbiamo bisogno per sistemare questo oggetto in uno spazio.[4] Così, la superficie della Terra è bidimensionale perché, per rappresentare una sua regione, ci serviamo di una mappa disegnata su un foglio di carta (o, in modo equivalente, possiamo usare due numeri, come la latitudine e la longitudine, per rappresentare ogni punto vicino a un punto dato). Un piano è bidimensionale, mentre una linea, anche se curva (in particolare, un cerchio), è unidimensionale. Lo spazio in cui il nostro mondo esiste (vale a dire il nostro universo) è tridimensionale, così come la regione che si trova al di sotto della superficie terrestre (ossia la crosta rocciosa e il magma). Torneremo in seguito sul concetto di dimensione, definendolo con ancora maggiore accuratezza e riducendolo a valori numerici. Vedremo che esistono varietà di qualunque dimensione.

Per ora, limitiamoci a menzionare altri due termini che vengono usati nel linguaggio comune, ma in un senso non abbastanza preciso per i nostri scopi. Il primo è «bordo». Alcune varietà bidimensionali hanno un bordo e altre no. Il bordo di una varietà bidimensionale è il suo margine (o l'insieme di più margini), così come viene visto da qualcuno che si trova sulla varietà stessa. Un piano che si estende all'infinito in ogni direzione non ha un bordo, mentre un disco appartenente al piano ha un bordo, ossia il cerchio da cui è racchiuso. La superficie esterna di un segmento di tubo di rame lungo un metro ha un bordo, ossia i cerchi che stanno alle due estremità. Una sfera non ha bordo, pur essendo essa stessa il bordo della palla solida che racchiude. Se vivete sulla Terra, potete continuare a percorrerla senza mai arrivare a un margine in corrispondenza del quale la Terra finisce. Analogamente, neppure un toro ha un bordo, pur essendo il bordo della ciambella in esso racchiusa. Se una varietà bidimensionale ha un bordo, quel bordo sarà unidimensionale. Il concetto di bordo mette in relazione oggetti di dimensioni diverse. Un cerchio non ha bordo (anche se è il bordo del disco in esso racchiuso), così come non ha bordo neppure una linea retta che si estende all'infinito in entrambe le direzioni. Un segmento di retta lungo un metro, però, ha un bordo, ossia i due punti posti alle sue estremità. L'interno solido della Terra ha un bordo, vale a dire la varietà bidimensionale — la sfera — da cui è racchiuso. Se una «varietà n-dimensionale» ha un bordo, questo bordo sarà di dimensione n-1.

Il secondo termine è «finito». Noi diciamo che una varietà bidimensionale è finita (o «compatta») se può essere coperta da un numero finito di mappe. Il piano euclideo (che da qui in poi chiameremo «2-spazio euclideo» o semplicemente «2-spazio»), che — come abbiamo studiato alle superiori — si estende all'infinito in due direzioni indipendenti, è una varietà bidimensionale non finita. Una sfera e un toro sono invece due varietà finite: non è cioè possibile continuare a muoversi

per sempre su una di esse senza infine ritornare da dove si è partiti.

Un equivoco comune consiste nel credere che, per essere finito, un oggetto debba avere un bordo. I primissimi dibattiti sulla finitezza o meno della Terra ponevano spesso questa alternativa: o la Terra continua a estendersi per sempre, oppure deve avere un margine esterno da cui potremmo cadere. Gli uomini non pensarono da subito che la Terra potesse essere una sfera (o un toro) e, quindi, essere finita ma priva di bordo. Non aiutava il fatto che, per pensare la Terra come una sfera era necessario accettare l'idea, in apparenza assurda, che le persone dall'altra parte del pianeta camminassero «a testa in giù». E se oggi questo concetto non crea problemi a nessuno, ci sono però numerose persone che commettono il medesimo errore quando parlano dell'universo. Esse, cioè, assumono che se l'universo è finito, debba avere un bordo (che in questo caso sarebbe un oggetto bidimensionale) che non possiamo oltrepassare. Ma le cose non stanno così.

Geometria e topologia

É necessario fare un'ultima, piccola puntualizzazione. Dobbiamo definire precisamente che cosa intendiamo dire quando affermiamo che due varietà sono «identiche». Come ogni altra cosa, anche questa affermazione dipende dal punto di vista che si intende assumere. Due oggetti possono infatti essere identici, o equivalenti, in un senso, ma diversi in un altro. Quando si parla della forma, in topologia non ci si preoccupa di aspetti come la dimensione o la distanza — che sono di pertinenza della geometria —, bensì di proprietà che si conservano quando gli oggetti vengono sottoposti ad allungamenti o piccole deformazioni. Tali proprietà appartengono al dominio della topologia. Diciamo che due superfici sono «topologicamente identiche» se i punti dell'una possono essere messi in corrispondenza biunivoca con i punti dell'altra in modo tale che punti vicini corrispondano a punti vicini (queste corrispondenze sono dette «continue»).[5] Due varietà topologicamente identiche si definiscono anche «omeomorfe», e la corrispondenza biunivoca che le rende tali è detta «omeomorfismo». La topologia studia quelle proprietà delle superfici (e di altri oggetti) che ci permettono di dire se due superfici (o altri oggetti) siano omeomorfe oppure no. Tali proprietà vengono chiamate «proprietà topologiche».

Le proprietà topologiche possono essere molto diverse dalle proprietà geometriche del tipo lunghezza e angolo. Due superfici qualunque che possono essere deformate l'una nell'altra tirandole e allungandole (ma senza strapparle, perché ciò potrebbe distruggere la continuità) sono omeomorfe. Due sfere di raggi differenti sono omeomorfe. Le superfici nella figura 2 sono tutte omeomorfe, e un topologo le vedrebbe tutte come sfere. In particolare, un topologo si potrebbe chiedere di che cosa mai si preoccupasse Colombo! Il mondo fatto a pera ipotizzato dal navigatore, infatti, è ancora una sfera, non meno della superficie di una mela. Per evitare confusioni, a volte ci riferiremo alla sfera che possiede la medesima curvatura in ogni suo punto, rappresentata a sinistra nella figura 2, indicandola come una «sfera rotonda». Da un punto di vista topologico, nella sua ipotesi sulla pera Colombo stava dicendo che la Terra non è una sfera rotonda, ma è pur sempre una sfera.

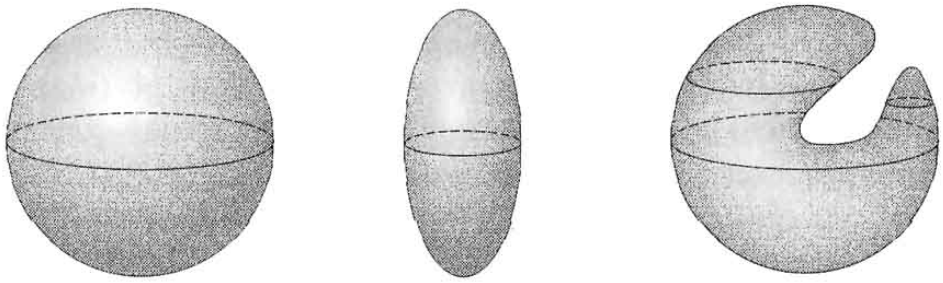


Figura 2: Tutte queste superfici sono omeomorfe alla sfera bidimensionale.

Chiaramente l'omeomorfismo è una forma molto approssimativa di identità. Il toro annodato che

vediamo nella figura 3 è omeomorfo a un toro regolare, anche se non c'è modo di trasformare l'uno nell'altro attraverso un processo di deformazione continua (perlomeno si stabilisce che non è possibile far passare i punti del toro attraverso il toro stesso).[6] Di fatto se incolliamo il margine superiore di un foglio su cui è rappresentato il planisfero al suo margine inferiore così da ottenere un cilindro, e quindi lo annodiamo prima di congiungere il margine destro e quello sinistro, otteniamo un toro annodato. Gli abitanti di un pianeta perennemente avvolto dalle nubi nel quale risultasse impossibile vedere le forme al di là della superficie, non sarebbero in grado di determinare, basandosi solo sull'atlante, se il mondo su cui vivono è annodato oppure no. Se abitassimo un mondo a forma di toro annodato, potremmo rappresentare le diverse parti della superficie in una serie di mappe e riassemblarle in modo da ottenere un toro regolare.

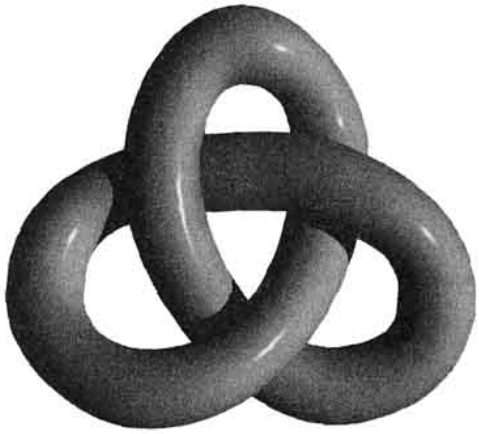


Figura 3: Un toro annodato.

Classificazione delle superfici

Ora che abbiamo definito una terminologia appropriata, possiamo porci alcune domande significative. Supponiamo di vivere su un mondo di cui abbiamo mappato con accuratezza ogni regione. In altre parole, ipotizziamo di avere un libro pieno di mappe che coprono l'intera superficie del nostro mondo. Dal momento che ci sono un numero finito di mappe, sappiamo che il mondo non si estende all'infinito. Se ridisegnassimo le carte geografiche mantenendo approssimativamente la medesima scala, le accostassimo e cercassimo di giustapporle tutte, quali diversi tipi di forme potremmo ottenere? In altri termini: quali sono tutte le possibili varietà bidimensionali?

Dobbiamo innanzitutto notare che una sfera e un toro non sono le uniche possibilità. Prendiamo per esempio il toro con due buchi rappresentato nella figura 4. Se vivessimo su un mondo simile e iniziassimo un viaggio su di esso partendo da un punto qualsiasi e muovendoci in una qualunque direzione, potremmo continuare a camminare per sempre senza mai abbandonare la sua superficie. Non ci sono infatti margini. Nessun esploratore, d'altra parte, incontrerebbe mai alcun buco sul suo cammino perché tutte le regioni sono fra loro connesse. Potremmo fare una mappa di ogni sua regione, per poi creare un atlante del mondo. Un geografo che esaminasse tale libro sarebbe in grado di determinare di che tipo di varietà si tratta?

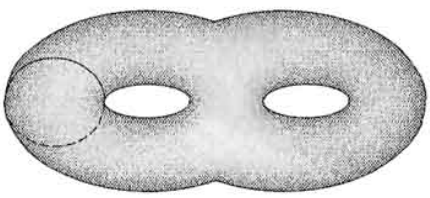


Figura 4: Un toro con due buchi.

Volendo appunto compilare un atlante di questo mondo, possiamo ritagliarlo in regioni tali da poter essere mappate con facilità. In effetti, possiamo creare un'unica carta del mondo unendo assieme le diverse mappe regionali. Immaginate di tagliare il mondo lungo quattro curve che iniziano da un singolo punto, come mostrato in figura 5. Per tener presente che cosa va congiunto con che cosa, contrassegniamo le curve con le lettere A, B, C, e D, come mostrato sotto, e tagliamo il toro nelle direzioni indicate. Iniziando con A e C, possiamo immaginare di srotolare la superficie su un pezzo di carta piatto con la forma di un «8» adagiato sul fianco. Tagliando lungo le due curve rimanenti (che ora sono segmenti di linea) otteniamo una sagoma che può essere deformata in un ottagono, e successivamente anche in un rettangolo. In questo modo, otteniamo una mappa del mondo con dei margini, che devono essere fatti corrispondere come indicato.

Possiamo elencare tutte le possibili varietà bidimensionali che corrispondono alla somma delle mappe ottenute? Dopo il ritorno della spedizione di Magellano, ma prima che qualcuno avesse esplorato i poli, avremmo potuto concepire una serie di forme credibili per il nostro mondo? La risposta, assieme alla sua dimostrazione, è una delle più grandi conquiste del XIX secolo.

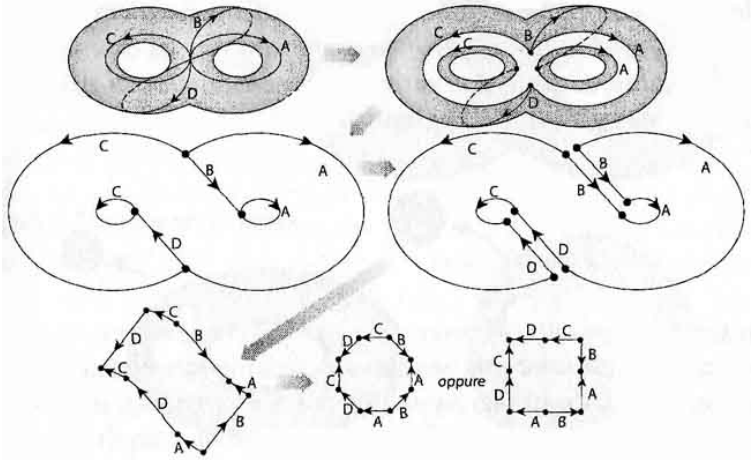


Figura 5: Tagliare un toro con due buchi.

L'elenco di tutte le possibili forme sembra più semplice di quanto in realtà non sia. Noi potremmo abitare su un toro a due buchi. Analogamente, potremmo anche prendere in considerazione un toro a tre buchi (si veda la figura 6), o a quattro, o con qualunque altro numero di buchi. Tutte queste figure sono differenti, ed esauriscono le possibili varietà bidimensionali orientabili. Tutte queste figure sono possibili forme di un mondo: se il nostro mondo avesse una qualsiasi di queste forme e noi ci trovassimo in un punto qualunque della sua superficie, potremmo tracciare una mappa della regione che ci circonda.

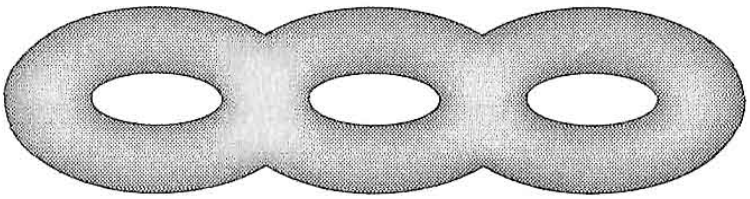


Figura 6: Un toro a tre buchi.

Un modo elegante per pensare queste differenti varietà è quello di ricorrere al concetto di «somma connessa» di due varietà. Supponiamo di avere due varietà bidimensionali e di ritagliate un disco da ognuna di esse (figura 7).

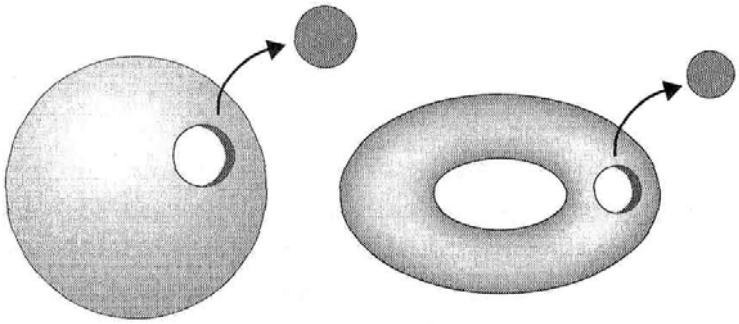


Figura 7: Ritagliare un disco da una sfera (a sinistra) e da un toro (a destra)

Il bordo di un disco è un cerchio. Possiamo creare una nuova varietà bidimensionale senza bordo incollando assieme le due risultanti «varietà-con-bordo» lungo i loro bordi, facendo cioè combaciare il cerchio dell'una con quello dell'altra. Questa nuova varietà è chiamata la somma connessa delle due varietà di partenza. La figura 8 mostra che il toro a due buchi è una somma connessa di due tori regolari. Analogamente, un toro a tre buchi è una somma connessa di un toro a due buchi e un toro regolare, ossia una somma connessa di tre tori. Un toro a quattro buchi è una somma connessa di quattro tori, e così via.[7]

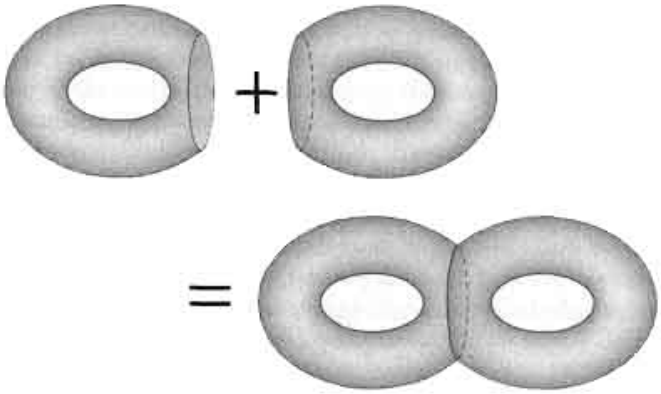


Figura 8: Una somma connessa.

Pertanto, un elenco completo delle varietà bidimensionali finite prive di bordo e orientabili (vale a dire, che possono essere la superficie di qualcosa) è dato dalla sfera, dal toro e dalle somme connesse di più tori.[8] Quanto più riflettiamo su questo risultato (e quanto più conosciamo in profondità la matematica), tanto più esso ci sembrerà qualcosa di miracoloso. In matematica, le superfici si ritrovano ovunque e possono avere aspetti molto differenti. Vladimir Arnold, uno dei massimi esperti viventi, paragona l'importanza della scoperta del teorema di classificazione delle superfici a quella della scoperta dell'America.[9]

Ora che conosciamo tutte le possibilità per le varietà bidimensionali finite, supponiamo che un geografo si trovi davanti un atlante completo di un qualche nuovo mondo. Supponiamo, cioè, che abbia un insieme dettagliato di mappe che coprono tutte le regioni, ma che non conosca la forma del mondo stesso. Sarebbe in grado di stabilire di che varietà bidimensionale si tratta? Potrebbe tentare di assemblare tutte le mappe, ma questo lavoro potrebbe rivelarsi molto arduo: immaginate le difficoltà che incontrerebbe se il mondo fosse un toro con due buchi, o peggio!

Questo problema dà origine ad alcune riflessioni matematiche molto interessanti. L'idea centrale è quella di prendere in considerazione i «cammini chiusi» — o «cicli» — sulla superficie. Si tratta di percorsi che iniziano e finiscono in corrispondenza del medesimo punto. Assumendo che una persona viva sulla superficie, essa potrebbe pensare a un ciclo come al fare un giro tornando infine al punto di partenza: è il cammino che seguiamo quando facciamo un viaggio e ritorniamo da dove siamo partiti. Potete raffigurarvelo come la linea curva che verrebbe tracciata da una corda srotolata

dietro di sé dal viaggiatore durante il suo tragitto. Solitamente i matematici introducono delle relazioni fra i cicli, le cosiddette «omologie», che ci permettono di classificare i diversi cicli e di manipolarli sotto forma di numeri. Le varietà topologicamente differenti si distinguono per il comportamento dei loro rispettivi cicli. Anche se una spiegazione approfondita di queste affermazioni ci porterebbe troppo lontano, c'è comunque un punto che riveste per noi un'importanza critica.

Per semplificare il concetto noi diciamo che un toro ha un buco, e che questo buco è ciò che lo rende diverso da una sfera. Tuttavia, se vivessimo su un mondo immenso (anche in questo caso, ipotizziamo che una perenne coltre di nubi ci impedisca di vedere oltre la superficie) fatto a forma di toro, e se non fossimo provvisti di navi spaziali, noi non saremmo in grado di vedere il buco. Anzi, se il toro fosse annodato come in figura 3, potremmo avere dei problemi anche solo a spiegare che cosa intendiamo parlando di buco.

Tuttavia, c'è un modo per distinguere se stiamo vivendo su un toro oppure su una sfera. Su un toro (o su qualunque somma connessa di tori) ci sono alcuni cicli che sono essenzialmente diversi da qualunque ciclo si possa tracciare su una sfera. Per rappresentare visivamente questa affermazione, immaginiamo di vivere su una varietà e di compiere un percorso partendo da un qualche punto. Immaginiamo anche di srotolare dietro di noi una corda mentre camminiamo, accertandoci di averla legata saldamente a un palo al punto di partenza. Se ci fermiamo in un punto intermedio di questo viaggio e proviamo a tirare la corda verso di noi, essendo legata al palo all'altra estremità essa farà resistenza e diventerà tesa. La corda traccerà così un cammino diretto dal punto dove ci siamo fermati a quello da dove eravamo partiti (e misurando la lunghezza della corda potremo conoscere l'esatta distanza fra i due punti). Riprendiamo quindi a camminare fino a completare il nostro giro.

Ora siamo ritornati da dove eravamo partiti e abbiamo lasciato dietro di noi un gigantesco anello di corda. Se iniziamo a recuperare la corda, riusciremo a riavvolgerla tutta, tenendo presente che il suo capo di partenza è ancora fissato al palo? Se siamo su una sfera o su un piano, la risposta è sì. Possiamo far restringere persino un anello che circonda l'equatore fino a ridurlo al suo punto di partenza. Mentre la tiriamo, la corda non ripercorre il tragitto che noi abbiamo appena seguito lungo l'equatore, ma scivola lateralmente — spostandosi, mettiamo, verso nord — sulla superficie della Terra. Anelli (i cicli) sempre più piccoli passeranno sopra l'Atlantico settentrionale, quindi il Canada, poi il Polo Nord, per poi iniziare a slittare verso sud e arrivare infine alla nostra posizione.

Se la sfera non fosse perfettamente rotonda, bensì fatta, per esempio, come la pera di Colombo, dovremmo liberare abbastanza corda per permettere il passaggio sopra la protuberanza, ma poi potremmo tirarla e ridurla a un punto. Mentre tiriamo la corda, essa traccia *sulla* superficie (la corda non può lasciare la superficie o passare sottoterra!) una serie di cicli via via più piccoli.[10] Su un toro, invece, ci sono alcuni cicli che non possono essere ridotti a un punto. In particolare, se passiamo attorno a un buco, non potremo poi ridurre il ciclo al di sotto del diametro di quel buco; lo stesso accade se il ciclo circonda il collo del toro. Le stesse considerazioni valgono anche per una somma connessa di tori. La figura 9 mostra un ciclo sul toro che non può essere ridotto a un punto, e un altro per il quale tale riduzione è invece possibile.

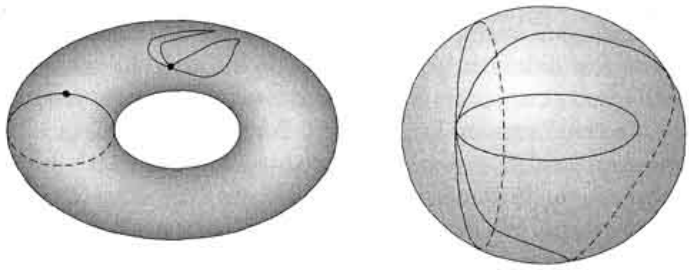


Figura 9: Il ciclo più a sinistra sul toro raffigurato qui sopra non può essere ridotto a un punto rimanendo sulla superficie; l'altro invece sì. Su una sfera, invece, ogni ciclo può essere ridotto a un punto.

Se ogni ciclo su una varietà può essere ridotto a un punto, diciamo che quella varietà è

«semplicemente connessa». Se teniamo presente quanto afferma il teorema di classificazione delle varietà bidimensionali, possiamo vedere che la sfera è l'unica varietà bidimensionale semplicemente connessa. Per quanto ciò sia difficile, lavorando con un atlante un geografo può determinare se la varietà in esso rappresentata è semplicemente connessa oppure no e, di conseguenza, se il mondo in questione è o non è una sfera.

Per adesso, non abbiamo ancora definito una «varietà tridimensionale». Come le varietà bidimensionali costituiscono i modelli dei mondi, le varietà tridimensionali sono quegli oggetti matematici che costituiscono i modelli degli universi. Ne esiste una particolarmente interessante chiamata «sfera tridimensionale», che è finita, è priva di bordo e gode della proprietà per cui ogni ciclo può essere ridotto a un punto. La congettura di Poincaré afferma che questa è l'*unica* varietà tridimensionale finita semplicemente connessa. Che cosa significa esattamente questa affermazione, e che cos'è la sfera tridimensionale?

4
La forma dell'universo

Proprio come avviene nel caso della nostra Terra, anche un atlante dell'universo sarebbe costituito da una raccolta di mappe. Tuttavia, la mappa di una regione dell'universo non sarebbe un pezzo rettangolare di carta, ma assomiglierebbe invece a una scatola solida di vetro (pensiamo a un acquario, per esempio) riempita di cristalli liquidi luminosi in cui fosse possibile accendere singoli punti in corrispondenza delle posizioni di stelle e pianeti (figura 10). In una scatola-mappa di questo tipo che contenesse anche il nostro sistema solare, a una distanza corrispondente in scala a 431 anni luce e direttamente sopra la Terra, troveremmo un punto luminoso corrispondente a Polaris, la stella polare. Guardando attorno al Sole in diverse direzioni sul piano dell'orbita terrestre, vedremmo gli altri pianeti. In una certa direzione a sud del piano dell'equatore, a una distanza corrispondente a poco più di quattro anni luce, ci sarebbero le tre stelle a noi più vicine, Proxima Centauri e la stella binaria Alpha Centauri. A seconda della scala della scatola-mappa, procedendo in un'altra direzione sempre a sud dell'equatore giungeremmo al centro della galassia, con il suo enorme buco nero, a una distanza corrispondente a circa 25.000 anni luce. Ancora più lontano, in un'altra direzione ancora, ci sarebbe Andromeda, la galassia a spirale a noi più vicina, a una distanza corrispondente a 2,9 milioni di anni luce. Un atlante dell'universo consisterebbe in una collezione di scatole trasparenti come questa, con ogni regione rappresentata in almeno una di esse. Se, come sembra probabile, l'universo non si estende all'infinito, il numero delle scatole necessarie per crearne un atlante completo sarebbe finito. Tuttavia, noi non possiamo «vedere» l'universo nel suo complesso, in uno sguardo d'insieme. Se avessimo un campionario completo dell'universo, tale da rappresentare ogni sua parte, potremmo cercare di assemblare le nostre scatole-mappa trasparenti. Tuttavia, proprio come rimanendo sul piano non è possibile unire le mappe del nostro mondo dando loro la forma di un globo, nello spazio ordinario non è possibile assemblare tutte le scatole-mappa dell'universo in modo da riprodurlo nella forma che gli è propria. Abbiamo cioè dei problemi a raffigurarci visivamente la forma di un universo nel suo complesso.

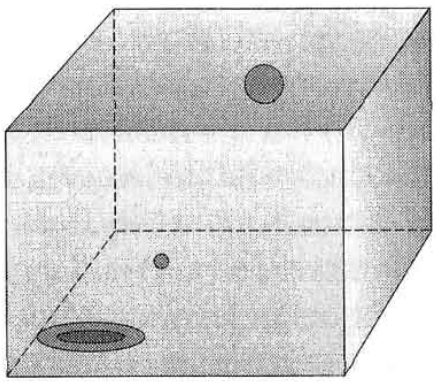


Figura 10: Una mappa di una regione contenente una piccola galassia a spirale nella sua parte frontale, in basso a sinistra.

Inoltre, non è possibile portarsi fuori dall'universo. Ciò costituisce un'importante differenza tra il caso della Terra e quello dell'universo. Se abbandoniamo la superficie del nostro pianeta a bordo di un razzo, possiamo poi osservarla dall'esterno. Dal momento che noi vediamo le cose in tre

dimensioni, e dato che la superficie terrestre è bidimensionale, possiamo vedere il globo curvarsi in una terza dimensione e visualizzare facilmente la sua forma complessiva. L'universo, però, è tridimensionale, e ciò significa che anche qualora potessimo uscirne, dovremmo comunque essere in grado di vedere in almeno quattro dimensioni per poter visualizzare la sua forma, cosa che non è concepibile.

Come vedremo, ciò non significa che l'universo non abbia una forma, e non significa neppure che l'universo non possa incurvarsi. Ci sono molteplici forme differenti che l'universo potrebbe avere; ed è praticamente certo che, proprio come la superficie della Terra, anch'esso si incurva in modi differenti nei suoi diversi luoghi.

Anche se l'universo è immensamente più grande della Terra, chi lo studia oggi può contare su alcuni vantaggi che non erano disponibili agli eredi di Pitagora quando si interrogavano sulla forma della superficie del nostro pianeta. A differenza della Terra, dove la nostra visuale è limitata da un orizzonte talmente ristretto che dobbiamo viaggiare per tracciare una mappa che copra un'area ragionevolmente grande, nel caso dell'universo possiamo scrutare zone remote servendoci dei telescopi. Inoltre, siamo diventati piuttosto bravi a misurare le distanze che ci separano dai vari oggetti che vediamo in cielo. Pertanto, possiamo costruire una mappa di una regione alquanto ampia dell'universo senza di fatto allontanarci dalla Terra. La nostra matematica è molto più avanzata di quella dei tempi di Colombo, e ci sono molti strumenti di cui possiamo servirci per indagare sul problema della forma dell'universo.

Universi finiti

Sebbene i greci credessero nella sfericità della Terra, molti di loro ritenevano che l'universo si estendesse all'infinito. Ecco, per esempio, ciò che affermava in proposito Archita, grande matematico pitagorico e amico di Platone:

> S'io mi trovassi all'estremità dello spazio, ad esempio nel cielo delle stelle fisse, potrei tendere la mano o un bastoncino fuori di quella? O non potrei? Dire che non si può è assurdo; ma se si ammette che si può tendere la mano fuori, quello ch'è fuori sarà corpo o spazio (e non c'è differenza, come vedremo). Si procederà dunque nello stesso modo, da estremità raggiunta ad altra estremità raggiunta, sempre ripetendo la domanda. E così, trovandosi che c'è sempre qualche cosa ove può giungere il bastoncino, è evidente che questo qualche cosa è infinito. Ora, se esso è corpo, l'assunto è dimostrato; se è spazio, dato che lo spazio è ciò in cui è o può essere un corpo, e che quando si parla delle sostanze eterne s'ha da dire senz'altro che è quello che è in potenza, anche così sarà dimostrato che infiniti sono corpo e spazio.[1]

Archita sta sostenendo che non esiste un bordo dell'universo: in qualunque punto ci troviamo, il cielo — a parte i diversi corpi che contiene — apparirà sempre identico. Non ci imbatteremo mai in un margine: ovunque ci troviamo, potremo sempre tendere in fuori una mano o un bastoncino. E dato che l'universo è privo di bordo, conclude erroneamente Archita, esso dev'essere infinito. Per comprendere il motivo per cui questo ragionamento è sbagliato, dobbiamo tener presente che lo potremmo ripetere anche per la superficie della Terra. Quando ci troviamo all'aperto, in un qualunque punto del pianeta, possiamo sempre tendere in fuori (orizzontalmente) una mano o un bastoncino: nessuna barriera ci impedisce di farlo. Non c'è nessun bordo, nessun margine. Se la conclusione di Archita fosse corretta, dovremmo quindi ugualmente concludere che anche la Terra si estende all'infinito in tutte le direzioni. Ma ciò è falso. Essa è una sfera (anche se fosse stata un toro, il discorso sarebbe rimasto lo stesso). Dire che l'universo non ha un bordo non significa dire che si estende all'infinito, così come dire che la superficie terrestre non ha un margine estremo non significa dire che è infinita.

Può anche darsi che l'universo si estenda all'infinito, ma ciò sembra molto improbabile. Spazio e materia sono intimamente legati, e l'affermazione secondo cui nell'universo ci sarebbe un ammontare infinito di materia dà adito a serie questioni teoriche. L'universo potrebbe anche avere

un qualche tipo di bordo, ma dire questo è un po' come assumere che il mondo sia un disco con un margine estremo dal quale si può cadere. Del resto, ben pochi scienziati con una buona preparazione matematica sono seriamente disposti a crederci.

Come ci sono molteplici forme possibili che la Terra avrebbe potuto avere (avrebbe potuto essere una sfera, un toro, una somma connessa di due tori e così via), allo stesso modo sono diverse anche le forme che l'universo potrebbe avere. A dire il vero, sono innumerevoli. E, a differenza di quanto avviene per le superfici, non abbiamo neppure una classificazione delle ipotetiche forme dell'universo. Sono di gran lunga troppe.

Per quanto riguarda dunque le sue dimensioni e la forma, ci troviamo quasi nella stessa, precisa situazione in cui si trovava Colombo nel 1492. Come ai tempi di Colombo non c'era un atlante completo della Terra, così oggi non c'è un atlante completo dell'universo. Per quel che sappiamo, se lasciassimo la Terra a bordo di un'astronave ultraveloce e viaggiassimo in una direzione fissa (facendo attenzione a non schiantarci contro qualche stella), dopo moltissimo tempo dovremmo ritornare vicino al punto da cui siamo partiti. Naturalmente, si parla di distanze immense e la velocità della luce sembra porre un limite fisico alla nostra possibile rapidità massima di viaggio, ma di per sé l'affermazione per cui se partissimo dalla Terra e continuassimo a procedere lungo una direzione costante finiremmo per tornare al punto di partenza non è meno sensata (o più paradossale) di quella avanzata da Eratostene — o, 17 secoli dopo, da John Mandeville—, secondo cui salpando dalla Spagna e navigando sempre verso ovest ritorneremmo infine a casa. E, proprio come ai tempi di Colombo, ci sono stime contrastanti sulla distanza che dovremmo percorrere prima di fare ritorno.

3-varietà

Dato che non possiamo vedere in più di tre dimensioni, e dato che non possiamo portarci fuori dall'universo, abbiamo dei problemi a visualizzare la forma dell'universo nel suo complesso. Ancor più che nel caso delle superfici, qui abbiamo assolutamente bisogno di essere precisi su ciò di cui stiamo parlando. Nel capitolo precedente abbiamo detto che una varietà bidimensionale è un oggetto matematico che condivide una proprietà chiave con la superficie della nostra Terra: tutte le sue regioni possono essere mappate su un pezzo di carta. Infatti, un ipotetico minuscolo esserino situato su un punto qualunque di una varietà bidimensionale percepirebbe l'area intorno a lui estendersi all'infinito, e avrebbe l'impressione di vivere su un piano. La sfera e il toro sono esempi di particolari varietà bidimensionali, e noi parliamo delle possibili forme della Terra in questi termini. Le varietà bidimensionali sono gli oggetti matematici che costituiscono i modelli dei possibili mondi.

L'oggetto matematico corrispondente che costituisce il modello per il nostro universo è una varietà tridimensionale, o «3-varietà». Essa consiste in un insieme in cui ogni punto appartiene a una regione che può essere mappata sui punti all'interno di una virtuale scatola trasparente. In altre parole, la regione intorno a ogni punto si presenta come uno spazio anziché come un piano. Come nel caso precedente, diciamo che un atlante è una raccolta di mappe che risulta completa, nel senso che ogni punto appartiene a qualche regione coperta da una delle mappe. Una 3-varietà è dunque l'oggetto che è coperto dalla totalità delle mappe di un atlante.

Fra le diverse 3-varietà, le «3-varietà-con-bordo» risultano un po' più facili da raffigurare. Un esempio è costituito da una palla solida: possiamo pensare alla Terra, ma ora dobbiamo includere non solo la sua superficie, ma anche tutto ciò che c'è dentro. Se ci trovassimo all'interno della Terra, potremmo mappare tutti i punti che ci circondano facendoli corrispondere ai punti all'interno della nostra scatola. Il bordo, ossia la superficie, è una sfera bidimensionale. Analogamente, anche un toro solido è una 3-varietà-con-bordo. Possiamo pensare a una ciambella o a un salvagente: il bordo è nuovamente costituito da una varietà bidimensionale, ma in questo caso si tratta di un toro. Se ci trovassimo all'interno di un toro solido (e non sulla sua superficie), potremmo anche in questo caso mappare i punti che ci circondano facendoli corrispondere ai punti all'interno della scatola.

Se abbiamo due 3-varietà-con-bordo e i loro bordi (che sono varietà bidimensionali) sono omeomorfi l'uno all'altro (come, per esempio, se ognuno dei due bordi è una sfera), possiamo incollarle assieme lungo i loro bordi stabilendo che i punti dei due bordi che corrispondono sotto un particolare isomorfismo sono lo stesso punto (i punti che non si trovano su nessuno dei due bordi rimangono distinti). L'oggetto matematico che ne risulta è una 3-varietà-senza-bordo. Ciò è dovuto al fatto che i precedenti punti di bordo cessano di essere punti di bordo. In corrispondenza di un ex punto di bordo, la regione da un lato del bordo appartiene a una varietà e quella dall'altro lato all'altra varietà, ed è possibile passare dall'una all'altra. Detto in altri termini, in corrispondenza di un ex punto di bordo la regione che ci circonda sarebbe ora riempita da punti di una varietà o dell'altra, e sarebbe possibile mapparla usando una scatola solida.

Come nel caso delle superfici, due 3-varietà sono topologicamente identiche se i punti dell'una possono essere messi in una corrispondenza biunivoca continua con i punti dell'altra. (Come ricorderemo, continua è un termine tecnico che esprime il concetto per cui a punti vicini corrispondono punti vicini.)[2] Due 3-varietà topologicamente identiche sono anche dette omeomorfe, e la corrispondenza biunivoca che le fa essere tali è indicata come un omeomorfismo.

Una varietà tridimensionale è detta compatta o finita se un suo atlante è composto da un numero finito di mappe. L'analogo tridimensionale del piano concepito da Euclide[3] che si estende all'infinito è una varietà tridimensionale non finita. La più semplice 3-varietà finita è la sfera tridimensionale, o «3-sfera».

La 3-sfera

Consideriamo due palle solide (figura 11). Ognuna di esse è bordata da una sfera bidimensionale *e* include la propria regione interna. Ora immaginiamo che queste due palle vengano incollate assieme lungo il loro bordo. In altri termini, dichiariamo che i punti corrispondenti situati sulle due sfere bordanti sono di fatto il medesimo punto. Noi non possiamo incollare fisicamente le sfere bordanti restando nello spazio tridimensionale, ma ciò non ha importanza dal momento che possiamo ugualmente immaginare con esattezza come si vivrebbe in un simile universo. Quando viaggiamo passando attraverso la sfera che prima costituiva il bordo di una delle due palle, noi ci ritroviamo immediatamente a proseguire il nostro viaggio nell'altra palla. Allo stesso modo, quando guardiamo attraverso l'ex bordo di una palla, vediamo direttamente nell'altra. Non vediamo nessuna interruzione, nessuna soluzione di continuità.

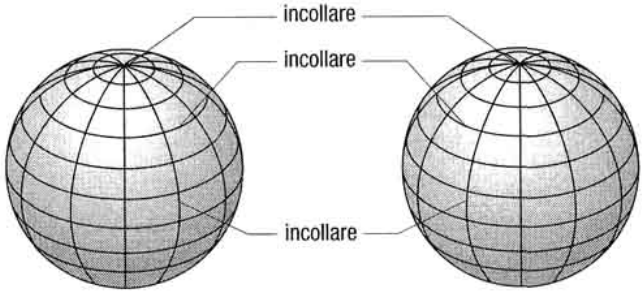


Figura 11 : Facendo corrispondere i punti sui bordi delle due palle solide otteniamo una 3-sfera.

È come se attraversassimo semplicemente l'equatore sulla nostra Terra bidimensionale: possiamo vedere attraverso di esso senza che la nostra visione sia ostacolata dalla presenza di una qualche linea di demarcazione reale.

Come ricorderemo, in qualunque punto di questo universo possiamo fare una mappa della regione che ci circonda usando lo spazio interno di una scatola. Un altro modo di pensare questa rappresentazione è quello di immaginare entrambe le palle solide come mappe simili alle scatole-mappa da cui siamo partiti, ma che anziché essere scatole solide trasparenti sono palle solide

trasparenti. Immaginiamo che ciascuna di esse sia la mappa di metà di un universo. Ossia, all'interno di ciascuna di esse sono mappate immagini di galassie e nebulose, ma ogni metà è completamente diversa tranne che per gli oggetti sul bordo, che corrispondono.

Si noti che la stessa costruzione applicata a due dischi (vale a dire, due cerchi nel 2-spazio considerati assieme alle regioni di piano in essi racchiuse) ci dà come risultato la sfera bidimensionale. Questi dischi formano i due emisferi della sfera bidimensionale (si veda la figura 12). Essa è ottenuta incollando assieme i bordi dei due dischi. In questo caso abbiamo un vantaggio, perché possiamo far emergere i dischi dal piano e immaginarli nel 3-spazio, dove non abbiamo problemi a visualizzare l'operazione di incollatura.

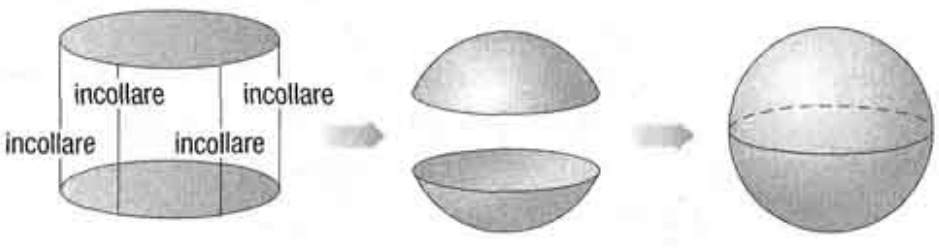


Figura 12: Connettendo i cerchi bordanti di due dischi (bidimensionali) otteniamo una sfera bidimensionale.

Anche qui torna nuovamente utile pensare ai dischi come a delle carte geografiche. In effetti, una rappresentazione comune della nostra Terra è costituita da due mappe che non sono rettangolari, ma sono dischi bordati da cerchi: un disco mostra l'emisfero a cui appartengono le Americhe e l'altro la parte opposta del mondo, con l'Europa, l'Asia, l'Africa e l'Australia.

Ci è più difficile immaginare la 3-sfera come un tutto unico perché, in questo caso, non abbiamo un'ulteriore dimensione in cui portarci per guardarla dall'esterno. Nel caso della 3-sfera, gli emisferi non sono dischi bidimensionali con bordi; essi sono invece due palle solide, e i loro bordi — che faremo coincidere nell'operazione di incollatura — non sono due cerchi, bensì due sfere bidimensionali.

Numerosi studiosi hanno sostenuto in modo convincente che l'universo immaginato da Dante (1261-1321) nella *Divina commedia* è una 3-sfera (anche se, naturalmente, egli non usava questo termine).[4] Dopo essere risalito dall'inferno fino alla superficie della Terra e aver raggiunto la sommità del monte del purgatorio, nel «Paradiso» Dante ascende attraverso i gusci sferici concentrici in cui si trovano i vari pianeti, supera il cielo delle stelle fisse e raggiunge il Nono Cielo, o Primo Mobile. Qui, in cima al Primo Mobile, egli contempla assieme all'amata Beatrice sia la metà dell'universo che ha appena attraversato (guardando verso il basso), sia l'altra metà, quella celestiale, che consiste in una serie di gusci sferici concentrici dove vivono gli angeli, poi gli arcangeli e quindi, procedendo verso l'interno, le schiere angeliche di grado più elevato. La sfera bidimensionale posta al margine esterno di quel guscio sferico che costituisce il Primo Mobile corrisponde all'equatore; da lì lui e Beatrice osservano l'universo. La Terra (e l'inferno al suo centro) si trovano a un polo, mentre all'altro polo c'è il regno dei serafini.

Nella figura 13, ognuna delle metà rappresenta una palla solida nella quale abbiamo tagliato una sezione conica in modo da poter vedere il suo interno. La Terra è posta al centro della palla di sinistra e il regno dei serafini al centro di quella di destra. Dobbiamo immaginare che Dante e Beatrice stiano guardando in un'apertura conica che dà sul centro luminoso della palla solida posta davanti ai loro occhi, e dobbiamo interpretare gli anelli di angeli come i bordi circolari — situati lungo la linea di taglio dell'apertura conica — dei gusci sferici. Questi ultimi, quindi, proseguono anche dietro il centro luminoso, anche se sono nascosti alla vista dell'osservatore.

La 3-sfera è finita. Potremmo dunque coprire con un numero finito di scatole-mappa tutte le regioni delle due palle solide che abbiamo incollato assieme. (Naturalmente, alcune mappe dovrebbero coprire delle porzioni di territorio suddivise fra entrambe le palle.) Inoltre, ci sono 3-

sfere di ogni misura. Possiamo incollare assieme palle solide grandi o piccole a piacere.

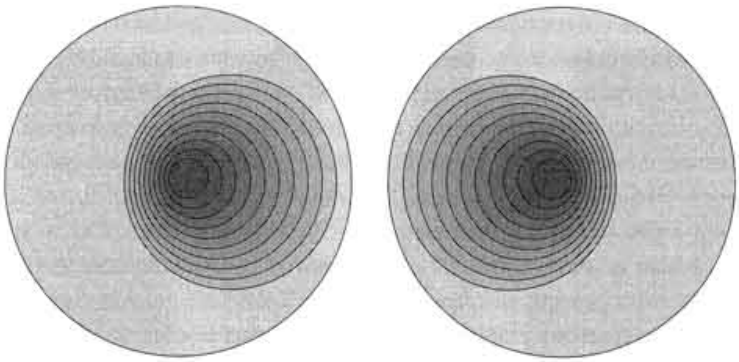


Figura 13: A sinistra c'è uno spaccato che mostra i gusci sferici concentrici del semi-universo visibile: il guscio sferico più esterno è il Primo Mobile (al cui bordo si trovano Dante e Beatrice); quindi, procedendo verso l'interno, troviamo il guscio sferico delle stelle fisse, seguito da quelli di Saturno, di Giove, di Marte, del Sole, di Venere, di Mercurio e della Luna, con la Terra posta infine al centro. A destra c'è invece l'Empireo, l'universo angelico riempito — procedendo anche qui verso l'interno — dai gusci sferici degli angeli, degli arcangeli, dei principati, delle potestà, delle virtù, delle dominazioni, dei troni, dei cherubini e, infine, dei serafini.

Infine (e si tratta di un'osservazione un po' più sottile), ogni ciclo nella 3-sfera può essere ridotto a un punto. Per rendercene conto, immaginiamo di vivere nella 3-sfera rappresentata nella figura 11 e di fare un viaggio srotolando dietro di noi — man mano che procediamo — una corda. Per esempio, potremmo partire da un punto interno della palla di sinistra, viaggiare verso l'esterno finché raggiungiamo il bordo, quindi entrare nella palla di destra, continuare a camminare finché giungiamo sul suo lato opposto, quindi ripassare nella palla di sinistra, proseguire fino al punto da cui siamo partiti e iniziare a riavvolgere la corda. Anche se il primo capo è legato, nulla ci impedisce di riavvolgere tutta la corda che abbiamo srotolato cammin facendo, descrivendo in tal modo dei cicli sempre più piccoli che iniziano e finiscono al nostro punto di partenza. Dopo un po', i cicli saranno interamente racchiusi nella palla di sinistra, e potremo continuare a tirare la corda finché, alla fine, il ciclo si ridurrà al punto di partenza. La 3-sfera, come la sfera bidimensionale, è quindi semplicemente connessa: ogni ciclo in essa tracciato può essere ridotto a un punto.

Ulteriori 3-varietà compatte

Ci sono molte 3-varietà compatte diverse dalla 3-sfera. Prendiamo, per esempio, un guscio sferico solido costituito dalla regione di spazio compresa fra due sfere concentriche. Per visualizzarlo possiamo paragonarlo alla «polpa» di un avocado — la zona commestibile compresa fra il seme centrale e la buccia esterna. Si tratta di una 3-varietà-con-bordo, dove il bordo consiste di due sfere bidimensionali. Se immaginiamo di incollare la sfera interna a quella esterna facendo corrispondere ogni punto della sfera interna al suo punto più vicino sulla sfera esterna (ossia, al punto dove la sfera esterna si interseca con il prolungamento del raggio passante per il punto dato della sfera interna), otteniamo una varietà tridimensionale priva di bordo (figura 14).

Per comprendere come sarebbe la vita in un universo di tale forma, immaginiamo di essere dei minuscoli esserini che fluttuano all'interno di un guscio sferico molto grande nel quale chi *esce dalla* 2-sfera esterna non abbandona il guscio ma rientra immediatamente dalla 2-sfera interna. Naturalmente, non potremmo vedere l'esterno, perché il bordo sferico esterno è di fatto coincidente con il bordo sferico interno. E non potremmo neppure vedere questi «bordi» sferici: guardando fuori dalla sfera esterna, vedremmo infatti dentro la sfera interna. In realtà, questi «bordi» sferici non sono tali, sono solo un artefatto di cui ci serviamo nella costruzione della figura: dal punto di vista delle persone che abitano in questa varietà, lì non ci sarebbe proprio nessun bordo. In qualunque punto di questo guscio sferico, guardandoci attorno avremmo sempre l'impressione di

fluttuare in un 3-spazio euclideo, e potremmo tracciare una mappa della regione che ci circonda. E dato che questo guscio sferico, per quanto molto grande, non è infinito, potremmo costruire un atlante costituito da un numero finito di scatole-mappa in grado di rappresentare tutte le regioni.

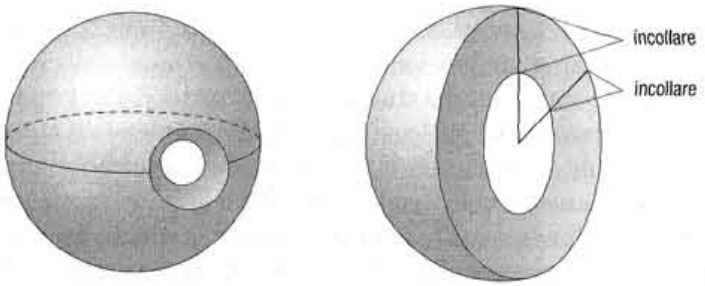


Figura 14: Congiungendo ogni punto del bordo sferico interno al punto corrispondente sul bordo sferico esterno — dove quest'ultimo si interseca con il prolungamento del raggio passante per il primo punto — otteniamo una 3-varietà-senza-bordo.

La differenza tra il vivere in questa 3-varietà-senza-bordo e il vivere in una 3-sfera diventa evidente solo su scala globale. Se dovessimo viaggiare verso l'esterno muovendoci lungo un raggio delle sfere bordanti, torneremmo al punto da cui siamo partiti. Ci troveremmo quindi a percorrere un cammino chiuso, ovvero un cammino su una varietà che comincia e finisce in corrispondenza del medesimo punto. Se immaginiamo di srotolare una corda lungo questo percorso, non avremmo poi modo di riavvolgerla fino a ridurla a un punto. Questo ciclo non può mai essere reso più piccolo della distanza fra le 2-sfere interna ed esterna identificando le quali abbiamo costruito la 3-varietà. Pertanto, quest'ultima dev'essere differente dalla 3-sfera.

Sotto altri aspetti, comunque, essa è invece simile alla 3-sfera. Anch'essa è finita pur non avendo un bordo. Camminando in qualsivoglia direzione ci ritroveremo infine vicini al punto da cui siamo partiti. È la forma di un possibile universo. Qualcuno potrebbe obiettare che nella realtà questa varietà non potrebbe esistere, poiché non possiamo connettere fisicamente i bordi sferici interno ed esterno. Immaginare di compiere questa operazione è però l'unico modo che abbiamo per visualizzare questa varietà. La varietà è l'«oggetto primario», e non possono esserci dubbi riguardo all'esistenza di questo oggetto matematico. Ciò che non sappiamo è se possa essere un modello per il nostro universo. Al pari della 3-sfera, anche questa varietà costituisce una potenziale forma che il nostro universo potrebbe avere.

Un altro esempio di 3-varietà si ottiene considerando un solido rettangolare (paragonabile a un acquario). Il suo bordo è costituito da sei facce, tre coppie di rettangoli paralleli. Supponiamo di connettere le facce opposte stabilendo che i punti che si trovano l'uno direttamente di fronte all'altro sono lo *stesso* punto. Ciò significa che se usciamo da destra, rientriamo da sinistra; se usciamo dall'alto, rientriamo dal basso; e se usciamo da dietro, rientriamo da davanti. Anche in questo caso, è importante sottolineare che in realtà non c'è proprio nessun bordo: se voliamo all'interno di questa varietà, non andremo mai a sbattere contro nessun ostacolo — e, tuttavia, non abbandoneremo mai la varietà stessa. Ciò potrebbe suonare inverosimile, ma non lo è. Nel precedente capitolo, abbiamo visto che è facile immaginare un mondo con una mappa tale che i luoghi rappresentati sul margine sinistro siano gli stessi che compaiono sul margine destro, e quelli sul margine superiore siano gli stessi che troviamo sul margine inferiore. Un mondo di questo tipo è un toro bidimensionale. L'analogo tridimensionale costruito connettendo le facce opposte di un solido rettangolare è chiamato «toro tridimensionale» o, in breve, «3-toro».

La rappresentazione del toro bidimensionale come un rettangolo con i lati opposti attaccati ci offre un altro modo per pensare il 3-toro. Consideriamo il solido rettangolare di partenza come se fosse composto da innumerevoli fogli di carta rettangolari, impilati uno dietro l'altro. Collegando la faccia superiore del solido con quella inferiore e la faccia destra con quella sinistra, veniamo automaticamente a collegare il margine superiore di ogni foglio di carta con quello inferiore, e il margine destro con quello sinistro. In altre parole, ci ritroviamo con un solido «fibrato» da tori

bidimensionali impilati uno sull'altro. Ciò che abbiamo ottenuto è un «guscio toroidale»: una regione solida compresa fra due tori bidimensionali, uno all'interno dell'altro, e riempita da tori concentrici via via più grandi. Il bordo consiste di due tori bidimensionali (corrispondenti al primo e all'ultimo foglio di carta della pila), come mostrato nella figura 15. Per ottenere un 3-toro, connettiamo ora i due tori bidimensionali che costituiscono il bordo. Se vivessimo all'interno di questa varietà, potremmo immaginare di vivere in un guscio toroidale dove il toro esterno coincide con il toro interno: dal nostro punto di vista, questi bordi non esisterebbero e passando attraverso uno di essi riemergeremmo dall'altro.

Anche in questa varietà ci sono cammini chiusi che non possono essere ridotti a un singolo punto. Di fatto, se partiamo da un punto situato nel mezzo del guscio e procediamo dritti verso l'esterno, uscendo dal toro esterno e rientrando quindi da quello interno, ritorniamo al punto da cui siamo partiti. Ora, non ci è possibile ridurre questo cammino a un punto. Pertanto, questa varietà non può essere omeomorfa alla 3-sfera, nella quale ciò è invece possibile. Essa, inoltre, non è omeomorfa neppure alla varietà che abbiamo costruito incollando i bordi interno ed esterno di un guscio sferico.[5]

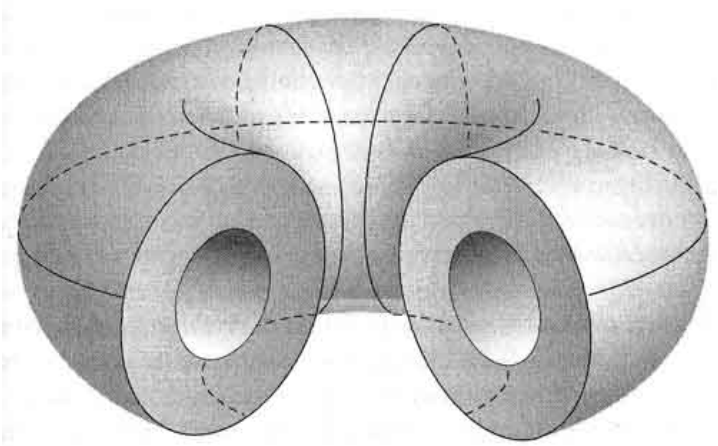


Figura 15: Il 3-toro si ottiene connettendo i punti corrispondenti sui tori interno ed esterno di un guscio toroidale.

Per inciso, il concetto di tracciare una mappa del mondo il più possibile completa si applica anche all'universo. Immaginiamo di aver mappato il nostro intero universo e di trovarci quindi con centinaia di scatole trasparenti che riproducono le stelle e i pianeti di differenti regioni dello spazio. Dopo averle naturalmente sistemate in modo che abbiano tutte la medesima scala, cerchiamo di unirle per creare una grande mappa solida. Ma, proprio come nel caso del mondo, possiamo proseguire soltanto fino a quando non ci ritroviamo ad avere su un margine esterno la faccia di qualche blocco che va connessa con la faccia di qualche altro blocco che si trova su un altro margine esterno. Come non possiamo connettere i punti sui margini della nostra mappa del mondo rimanendo in un piano bidimensionale, così non ci è possibile connettere le facce sui margini esterni della nostra mappa di scatole dell'universo rimanendo nel nostro spazio tridimensionale. Ma ciò non dovrebbe scoraggiarci. Il piano bidimensionale e lo spazio tridimensionale che si estendono all'infinito — e che abbiamo studiato nelle lezioni di geometria alle superiori — sono oggetti matematici che vanno considerati come costruzioni concettuali, esattamente come le varietà di cui stiamo parlando.

La congettura di Poincaré

Abbiamo analizzato qualche esempio di 3-varietà compatte: il 3-toro, la 3-sfera e la varietà ottenuta connettendo i bordi interno ed esterno di un guscio sferico. Ce ne sono molte altre, in numero

infinito. Ci sono anche infinite varietà bidimensionali, ma sono state tutte classificate. Non così le varietà tridimensionali, fra le quali c'è una ricchezza di differenze molto più grande; finora nessuno si è mai avvicinato all'obiettivo di classificarle tutte. L'ingegno umano è quasi illimitato, e gran parte di esso è stato sfruttato per costruire 3-varietà differenti, congiungendo in diversi modi le facce opposte di solidi regolari. Data una 3-varietà, possiamo per esempio ritagliare da essa un toro solido e poi incollarlo nuovamente in un modo diverso così da ottenere un'altra 3-varietà, spesso diversa. Date due 3-varietà, possiamo ritagliare una palla solida da ciascuna di esse e incollare fra loro le due 3-varietà-con-bordo che ne risultano, connettendo i punti delle sfere bidimensionali che facevano da bordo alle palle solide che abbiamo rimosso. Ognuna di queste 3-varietà costituisce una potenziale forma che il nostro universo potrebbe avere. Davanti a noi si dipanano talmente tante possibilità che non sappiamo che pesci pigliare. C'è qualche modo per sbrogliare il bandolo di questa matassa?

Nel corso dell'ultimo secolo, molti individui hanno dedicato il lavoro di tutta la loro vita ad approfondire la nostra comprensione delle 3-varietà. Ma, cosa esasperante, la soluzione al problema più semplice ha eluso tutti i tentativi di arrivare a una risposta: fra tutte queste 3-varietà, ce n'è qualcuna che sia diversa dalla 3-sfera e che abbia la proprietà per cui ogni cammino in essa contenuto può essere ridotto a un punto? Se non esiste nessuna varietà tale da soddisfare questi due requisiti, allora potremmo dire con certezza se il nostro universo è una 3-sfera usando un atlante completo per controllare se ogni cammino chiuso può essere ridotto a un punto. La congettura di Poincaré afferma per l'appunto che tale varietà non esiste. Più formalmente, e detto in modo più positivo, la congettura di Poincaré asserisce che ogni 3-varietà compatta e semplicemente connessa (sulla quale cioè ogni cammino chiuso può essere ridotto a un punto) è omeomorfa (ossia topologicamente identica) alla 3-sfera.

Questa è la domanda più semplice che ci possiamo porre intorno alla potenziale forma del nostro universo. Essa, tuttavia, è stata un tormento e, per alcuni matematici, una vera e propria ossessione, tale da minare la loro carriera. È stata la sua importanza ad attirare un così corposo uditorio alle conferenze del Mit e della Stony Brook University. Si tratta della congettura che è stata infine risolta da Perelman. Una dimostrazione legata a un premio da un milione di dollari.

5
La geometria di Euclide

Se il nostro universo non si estende all'infinito, e se non ha un bordo esterno, ciò non significa che dev'essere in qualche modo curvo o ripiegato su se stesso? O, per riformulare la domanda nella terminologia che abbiamo appreso nei capitoli precedenti, una varietà tridimensionale compatta e senza bordo non dovrebbe curvarsi su se stessa? Come potremmo altrimenti spiegare il fatto di continuare a muoverci in una direzione e tornare indietro da dove siamo partiti? Dire che la superficie del nostro mondo è bidimensionale nel senso che possiamo mappare le sue regioni su fogli piatti di carta è un conto, ma non dobbiamo anche aggiungere che essa ha bisogno di una terza dimensione in cui curvarsi? E la stessa cosa non dovrebbe valere anche per il nostro universo tridimensionale? Se esso è veramente curvo — qualunque cosa ciò significhi —, non ha forse bisogno di una direzione in cui curvarsi? Ma se il nostro universo include tutto, come può esserci un altro spazio in cui si possa curvare? E, per l'appunto, che cosa intendiamo quando diciamo «curvarsi»? Questi interrogativi hanno un vero e proprio significato, o sono soltanto un fuorviante gioco di parole frutto di una terminologia mal definita?

Queste domande hanno un senso, e rivestono un'importanza critica per la congettura di Poincaré e la sua dimostrazione. Esse, inoltre, illustrano il motivo per cui i matematici insistono in generale molto sull'assoluto rigore. Ogni volta che comunichiamo con un'altra persona, noi ci basiamo su anni di esperienza condivisa. Sappiamo che un bicchiere non cadrà passando attraverso un tavolo, che gli edifici hanno un interno accessibile attraverso le porte, che un uomo può essere destro o mancino. Noi sappiamo che cosa significa essere innamorati o provare dolore, e non abbiamo bisogno di definizioni precise quando facciamo riferimento a queste cose. Gli oggetti della matematica, invece, giacciono al di fuori del campo della nostra comune esperienza. Se non li definiamo con attenzione, non possiamo operare con essi in modo significativo, o parlarne con altre persone.

Gli artisti e gli umanisti abbracciano la complessità e l'ambiguità. I matematici, al contrario, lavorano definendo ossessivamente i termini e ripulendoli dai significati estranei. L'insistenza quasi nevrotica sul fatto che ogni cosa dev'essere rigorosamente definita e dimostrata ci permette, in ultima analisi, di immaginare l'inimmaginabile e di parlarne. La maggior parte delle persone, traumatizzate dall'incontro scolastico con la matematica, sanno fin troppo bene che tale materia è la più meticolosa e la più severa delle discipline, ma poche di loro si rendono conto che è anche la più liberatoria e la più immaginativa di tutte le attività umane. L'assoluta precisione ci permette di acquisire la libertà di sognare in modo significativo.

L'assoluta precisione, però, ha un prezzo. I termini di cui scegliamo di servirci devono essere definiti con estrema accuratezza, e tutte le affermazioni che ne conseguono — anche quelle in apparenza scontate — devono essere dimostrate. Ciò che ci sembra ovvio può essere terribilmente difficile da dimostrare — e, a volte, si può anche scoprire che è errato. Le eccezioni apparentemente minuscole hanno un loro imprescindibile peso, possiamo finire per essere travolti dai dettagli, e il progresso può essere insopportabilmente lento. La matematica è l'unico campo dell'attività umana dove è possibile conoscere qualcosa con assoluta certezza, ma il duro lavoro di farsi strada attraverso il pantano delle possibili formulazioni viene troppo spesso a precludere quelle fantastiche illuminazioni che toccano solo a pochi eletti. Nulla può illustrare la tensione fra la precisione e la capacità di sognare meglio degli *Elementi* di Euclide, il famoso trattato di geometria che ha avuto un'importanza fondamentale per la nostra storia e sul quale ora ci soffermeremo.

Gli Elementi

Gli *Elementi* di Euclide risalgono al regno di Tolomeo I Sotere, attorno al 300 a.C. e furono redatti ad Alessandria. Fin da subito fecero scalpore. Gli *Elementi* codificavano la matematica sviluppata dai tempi di Talete e Pitagora, passando per Platone. Essi reinterpretavano le millenarie tradizioni matematiche babilonesi ed egiziane inserendole in una cornice tipicamente greca.

Purtroppo, non sappiamo quasi nulla di Euclide (c. 325-c. 265 a.C.).[1] Le notizie che possediamo su di lui sono ancora più esigue di quelle che conosciamo su Pitagora, e quel poco che sappiamo è stato oggetto di accese dispute fra gli studiosi. Euclide scrisse almeno dieci libri, solo la metà dei quali è sopravvissuta. Numerosi indizi fra loro coerenti ci suggeriscono che visse dopo Aristotele e prima di Archimede. Fu uno dei primi matematici della grande biblioteca di Alessandria, dove radunò attorno a sé un gruppo di talentuosi matematici. Le leggende su di lui abbondano, molte sotto forma di aneddoti all'interno di opere di altri matematici. Una di esse ci racconta che Tolomeo chiese a Euclide di indicargli una via breve per imparare la geometria e si sentì rispondere: «Non esiste una via regale che conduca alla geometria». Un'altra racconta di uno studente che, dopo aver incontrato la prima proposizione degli *Elementi,* chiese a Euclide che scopo pratico avesse lo studio della geometria. Stando alla leggenda, il matematico si sarebbe allora rivolto al suo schiavo replicando con sdegno: «Da' a questo ragazzo una moneta, dato che deve trarre un profitto da ciò che apprende».

Gli *Elementi* contengono 13 libri (capitoli). I primi sei si occupano della geometria piana, quelli dal 7 al 10 della teoria dei numeri e quelli dall'11 al 13 della geometria solida. Ogni cosa è derivata dai primi princìpi. Il primo libro inizia con 23 «definizioni», cinque «nozioni comuni» e cinque «postulati». Le definizioni danno un nome agli oggetti e ai concetti fondamentali che Euclide prende in considerazione nell'opera. Nelle nozioni comuni vengono esplicitate alcune regole comunemente accettate intorno al ragionamento e alle relazioni. I postulati, o «assiomi», sono affermazioni riguardanti gli oggetti considerati che vengono assunte come vere senza dimostrazione. Oggi noi considereremmo anche le nozioni comuni come assiomi. Definizioni, nozioni comuni e postulati sono presi come i punti di partenza da cui vengono derivate — seguendo rigorose regole logiche — le successive asserzioni, chiamate «proposizioni». Una proposizione particolarmente significativa è detta «teorema»; una il cui scopo principale è quello di dimostrare un teorema è chiamata «lemma»; infine, una che segue da un teorema con particolare facilità è detta «corollario». Una «dimostrazione» di una proposizione è costituita da un ragionamento deduttivo preciso e ordinato in cui ogni asserzione è un assioma o una proposizione dimostrata in precedenza, o può essere da questi derivata in base alle regole formali della logica. Essa parte da assiomi e proposizioni noti e termina con l'affermazione di ciò che va dimostrato.

Ecco, a titolo di esempio, alcune delle definizioni presentate nel libro 1:[2]

1. Un *punto* è ciò che non ha parti.
2. Una *linea* è una lunghezza senza larghezza.

[…]

8. Un *angolo piano* è l'inclinazione reciproca di due linee in un piano, le quali si incontrino e non giacciano in linea retta.
9. Quando le linee che comprendono l'angolo sono rette, l'angolo è detto rettilineo.
10. Quando una retta innalzata a partire da un'altra retta forma con essa angoli adiacenti e uguali fra loro, ciascuno dei due angoli è retto, e la retta si dice «perpendicolare» a quella su cui si è innalzata.

[…]

23. Diconsi «parallele» rette giacenti nello stesso piano che, prolungate illimitatamente in entrambe le direzioni, non si incontrino fra loro da nessuna delle due parti.

Ecco le cinque nozioni comuni:

1. Cose uguali a un'altra medesima sono tra loro uguali.
2. Se a cose uguali si aggiungono cose uguali, allora si ottengono cose uguali.
3. Se da cose uguali si tolgono cose uguali, allora si ottengono cose uguali.
4. Cose che possono essere portate a sovrapporsi l'una con l'altra sono uguali tra loro.
5. Il tutto è maggiore della parte.

Ed ecco i cinque postulati:

1. E possibile condurre una linea retta da un qualsiasi punto a ogni altro punto.
2. È possibile prolungare illimitatamente una retta finita in linea retta.
3. È possibile descrivere un cerchio con qualsiasi centro e distanza [raggio] qualsiasi.
4. Tutti gli angoli retti sono uguali fra loro.
5. Se in un piano una retta, intersecando due altre rette, forma con esse, da una medesima parte, angoli interni la cui somma è minore di due angoli retti, allora queste due rette indefinitamente prolungate finiscono con l'incontrarsi dalla parte detta.

Euclide procede quindi deducendo tutte le verità comunemente accettate della geometria piana, servendosi in ogni caso soltanto delle definizioni, delle nozioni comuni, dei postulati e delle proposizioni dimostrate in precedenza. Così, per esempio, la proposizione 1 afferma che dato un qualsiasi segmento di retta, possiamo costruire un triangolo equilatero che abbia per lato quel segmento. La proposizione 4 dichiara che se due lati di un triangolo e l'angolo fra essi compreso sono uguali a due lati di un altro triangolo e all'angolo fra essi compreso, i due triangoli sono uguali. Gran parte dei testi scolastici si riferiscono a questa proposizione indicandola come il «primo criterio di congruenza dei triangoli» (lato-angolo-lato). La proposizione 5 ci dice che gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono uguali (la definizione di «isoscele» richiede soltanto l'uguaglianza di due lati, e resta quindi da dimostrare che anche gli angoli generati dall'intersezione fra questi due lati e il terzo sono fra loro uguali). La proposizione 32 afferma che la somma degli angoli interni di un triangolo è pari a un angolo piatto (ossia, a 180 gradì) e la proposizione 37 ci dà la formula per calcolare l'area di un triangolo. La proposizione 47 è il teorema di Pitagora: la somma delle aree dei quadrati costruiti sui due lati di un triangolo che si incontrano formando un angolo retto (ossia, i cateti di un triangolo rettangolo) è uguale all'area del quadrato costruito sul lato opposto all'angolo retto (ossia, l'ipotenusa); e la proposizione 48 è la sua reciproca (se in un triangolo l'area del quadrato costruito sul lato maggiore è uguale alla somma delle aree dei quadrati costruiti sui due lati rimanenti, allora l'angolo compreso fra i due lati rimanenti è un angolo retto). Due millenni di geometria in poche, rigorose paginette!

Prima di Euclide erano già apparsi altri testi che ponevano la stessa enfasi sulla deduzione. Ma Euclide riuscì a impostare meglio il tutto. La sua scelta degli assiomi, la sua disposizione delle proposizioni e anche la mera estensione dei temi trattati erano brillanti e rendevano obsoleti gli altri testi. Platone, Aristotele e gli altri filosofi greci nutrivano un enorme interesse per la matematica, e i due secoli dai tempi di Talete e Pitagora alla fondazione di Alessandria avevano visto un gran numero di discussioni sulla geometria, assieme a ragionamenti su che cosa seguisse da che cosa e scambi di idee profonde su quali fossero gli autentici princìpi primi. Euclide mise ordine nel marasma di dimostrazioni e discussioni sparse e le raccolse. Le scoperte degli oltre due secoli di teoria dei numeri e geometria greche e quelle — avvenute 15 secoli prima — dei matematici babilonesi vennero dedotte rigorosamente a partire dai primi princìpi. Partendo da un pugno di affermazioni molto semplici, e procedendo inesorabilmente a piccoli passi, Euclide raggiunse uno dopo l'altro una serie di risultati veramente profondi. Le conquiste ottenute faticosamente nel corso

dei secoli sono presentate in modo da apparire qualcosa di inevitabile.

La comparsa degli *Elementi* di Euclide in una cultura che stimava molto la geometria, che si interrogava sui diversi risultati e che aveva fissato le regole del ragionamento formale contribuì all'esplosiva creatività dei primi anni di Alessandria. Una serie di matematici di straordinario talento, i più brillanti dei quali furono Archimede (287-212 a.C.) e Apollonio di Perga (262-190 a.C.), giunsero a teorie e risultati matematici di vasta portata basati sulle fondamenta gettate dagli *Elementi.* Nei due secoli successivi, la matematica e la scienza avrebbero fatto grandi progressi. Teodosio di Bitinia (c. 160-90 a.C.) e Menelao di Alessandria (c. 70-140 d.C.) indagarono la geometria della sfera. Ipparco (190-120 a.C.) ed Eratostene (c. 275-195 a.C.) innalzarono il livello dell'astronomia e della geografa matematica. Gran parte delle loro opere sono andate perdute, o ci sono giunte in una forma che rende difficile determinare che cosa stessero asserendo gli autori.

Gli Elementi e il rigore

Di fronte a ogni opera che, come gli *Elementi,* vuole presentarsi come rigorosa, viene spontaneo chiedersi quanto effettivamente lo sia. Contrariamente a ciò che sono andati affermando in buona fede generazioni e generazioni di insegnanti, di fatto Euclide non procede servendosi solo di assiomi e definizioni, ma usa tacitamente anche altre proprietà.

Prendiamo, per esempio, la proposizione 1. Essa afferma che, dato un qualsiasi segmento di retta, possiamo costruire un triangolo equilatero che abbia per lato quel segmento. La dimostrazione procede nel modo seguente. Indichiamo con A e B i punti che delimitano il segmento dato. In base al terzo postulato, possiamo disegnare il cerchio che ha per centro il punto A e per raggio il segmento AB. Sempre in base al terzo postulato, possiamo poi disegnare un altro cerchio con lo stesso raggio, ma che ha per centro il punto B (figura 16).

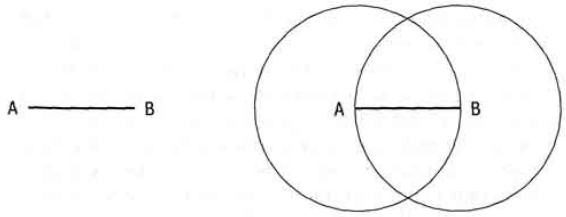


Figura 16: Due cerchi con il medesimo raggio.

Questi cerchi si intersecano in due punti. Prendiamone uno e chiamiamolo C. In base al primo postulato, possiamo disegnare i segmenti AC e BC. Il triangolo che ha per lati AB, BC e AC deve quindi essere equilatero, poiché AB, BC e AC hanno tutti la stessa lunghezza (essendo tutti raggi di cerchi che hanno il medesimo raggio, come in figura 17).

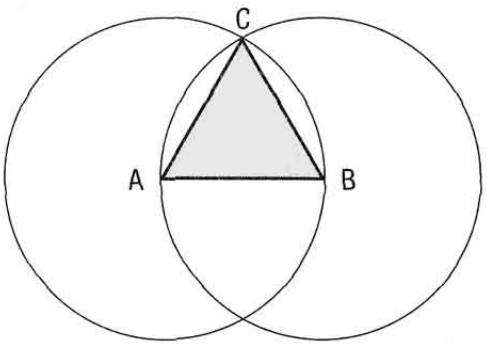


Figura 17: La costruzione di un triangolo equilatero.

Bene. Ma quale postulato o proprietà afferma che i cerchi che hanno per centro i punti A e B si debbano obbligatoriamente intersecare?

Ciò non segue né dai postulati né dalle definizioni, e si tratta di un'evidente lacuna, notata fin quasi dall'inizio e menzionata in molti commentari. Se il sistema dev'essere completamente esplicito su tutte le assunzioni, e non si deve dar nulla per scontato, che cosa consente a Euclide di assumere implicitamente che due linee o cerchi che si incrociano debbano avere un punto in comune? Ci sarebbe bisogno di una sorta di «assioma di ordine» che affermi che se una linea o un cerchio contengono punti che si trovano da entrambe le parti di un'altra linea o cerchio, allora le due linee (o cerchi) devono avere almeno un punto in comune.[3] Ci sono anche altre lacune. Molte dimostrazioni, e non solo quella della proposizione 1, lasciano parecchio a desiderare. Inoltre, alcuni dei postulati non sono chiari.

I matematici e gli studiosi sanno che ci sono delle lacune nell'opera euclidea, e nel corso dei secoli ci sono state innumerevoli discussioni su assiomi alternativi o possibili assiomi aggiuntivi. Ciò non ha trattenuto generazioni di maestri adoranti — inebriati dall'ordine maestoso, dall'accessibilità e dall'evidente utilità — dal celebrarla con grande clamore come un capolavoro dell'intelletto umano. Tuttavia, a uno studente attento gli *Elementi* daranno l'impressione di un'opera dove la razionalità cede spesso il passo al capriccio. L'insistenza nel dire che gli *Elementi* sono ineccepibili e che rappresentano l'apice del pensiero rigoroso ha l'effetto di allontanare alcuni studenti dalla matematica. Ci si chiede quanta paura della matematica nasca dalla disgiunzione fra l'asserzione che Euclide è perfetto e l'impressione intuitiva (ma difficile da articolare) avvertita da alcuni allievi, secondo la quale negli *Elementi* c'è qualcosa che non torna. A meno che uno non abbia un carattere insolitamente ribelle, è molto più facile che dia la colpa a se stesso e concluda che la matematica è al di fuori della sua portata.

Vale la pena di tenere a mente che i risultati matematici, per quanto vengano rappresentati come eterni e indipendenti dalle specifiche culture umane, vengono di fatto trasmessi e compresi all'interno di contesti sociali e culturali ben definiti. Alcuni, per esempio, sostengono che i greci abbiano inventato le dimostrazioni al fine di riuscire a comprendere i risultati matematici ottenuti da babilonesi ed egizi senza aver accesso al contesto in cui questi risultati erano stati scoperti e usati.[4] Per poter usare questi risultati, i greci avevano bisogno di metter da parte i calcoli differenti, in apparenza contraddittori, usati da queste civiltà, e riformularli da capo nella loro specifica terminologia. Si tratta di un'ipotesi certamente plausibile. Anche all'interno di una stessa civiltà, ogni generazione di matematici reinterpreta e riorganizza la matematica delle generazioni precedenti. Imparare la matematica significa reinventarla.

Ma l'ambiguità si spinge ancor più in profondità. La cultura alessandrina di 23 secoli fa era profondamente diversa dalla nostra. Per quanto nei suoi primi secoli fosse molto avanzata sotto il profilo matematico e tecnologico, ampie parti di questa conoscenza sono andate perdute, e non sappiamo praticamente nulla del contesto in cui gli *Elementi* vennero concepiti. In un suo provocatorio libro, Lucio Russo afferma che la scienza, nel senso moderno del termine, fiorì ad Alessandria dal 300 al 150 a.C. e andò in seguito perduta.[5] Stando a Russo, le parti geometriche degli *Elementi erano* una teoria del calcolo: per fare i calcoli, i greci prima li traducevano in geometria, quindi disegnavano le costruzioni geometriche rilevanti con riga e compasso e le misuravano. Come il regolo calcolatore secoli dopo, la riga e il compasso erano analoghi mezzi di calcolo, e gli *Elementi* erano una sorta di manuale che mostrava come e a quale scopo essi potevano essere utilizzati.

Le posizioni di Russo si allontanano parecchio da quelle tradizionali e si espongono senz'altro ad accese critiche. Tuttavia, l'evidente lacuna nella dimostrazione della proposizione 1 gioca a favore della tesi di Russo secondo la quale Euclide stava creando un modello matematico dei possibili usi di riga e compasso su un pezzo di pergamena, e non mirava affatto a raggiungere una purezza assoluta. Il primo assioma afferma che possiamo tracciare una retta fra due punti qualsiasi, e il secondo che qualunque segmento di retta può essere esteso all'infinito. Presi assieme, questi due assiomi equivalgono in sostanza a dire che abbiamo in mano una riga, ma che non ci preoccuperemo delle complicazioni che nascono dal suo essere troppo corta. Il terzo assioma,

secondo il quale possiamo tracciare un cerchio con qualsiasi centro e di qualsiasi raggio, ci dice che abbiamo un «compasso ideale» — possiamo cioè assumere che sia grande o piccolo a piacere, a seconda delle nostre esigenze. Possiamo immaginare che Euclide volesse mostrarci ciò che possiamo fare con riga e compasso al di là delle limitazioni fisiche di questi strumenti. Il problema di postulare che le rette e i cerchi tracciati con righe e compassi si intersecano in un punto quando si incrociano non lo avrebbe neppure sfiorato. In effetti, se avesse in mente degli oggetti fisici ideali, ciò gli sembrerebbe del tutto ovvio.

La plausibilità della tesi di Russo dovrebbe insegnarci una lezione di umiltà. Noi non conosciamo lo scopo degli *Elementi* o il pubblico a cui erano destinati, ma l'idea diffusa secondo cui si trattava di un manuale per gli alunni di scuola potrebbe non essere corretta. Anche la lettura più superficiale degli *Elementi* ci suggerisce che sono stati scritti per un pubblico di persone adulte, non di bambini. La supposizione che fossero un libro di testo per gli scolari legati all'ambiente della biblioteca di Alessandria è, per l'appunto, soltanto una supposizione.

La longevità degli Elementi

Difetti a parte, non è possibile leggere gli *Elementi* di Euclide senza provare una sincera ammirazione per la maestria con cui sono impostati e per l'intelligenza delle dimostrazioni presentate. L'incessante progresso dalle nozioni più semplici alle proposizioni più sottili, profonde e belle, testimonia le capacità della ragione umana. Guardando le cose in retrospettiva, è facile dare per scontata la longevità degli *Elementi* e inventare delle razionalizzazioni a posteriori che spieghino la loro sopravvivenza. Ogni opera di valore deve durare nel tempo, saremmo portati a dire. Noi siamo propensi a credere che i libri realmente validi dell'antichità siano quelli che sono di fatto giunti sino a noi. Stando a questo vecchio preconcetto, quanto più un manoscritto era autorevole, tanto più era probabile che venisse copiato e ricopiato, successivamente tradotto e che quindi sopravvivesse nonostante la perdita del manoscritto originale greco. Questa pia illusione è certo rassicurante, ma sono andati persi troppi volumi fondamentali per poterle dar credito. Euclide fu il più famoso geometra dell'antichità, e tuttavia metà dei suoi libri sono scomparsi.[6]

La superficiale idea secondo cui ogni libro di valore — come gli *Elementi* — è di per sé destinato a conservarsi distoglie il nostro sguardo dall'effettivo miracolo della sua sopravvivenza. Gli *Elementi* si conservarono anche se le energie creative e la qualità degli studi alessandrini andarono lentamente scemando (ed erano ormai in gran parte svanite quando Giulio Cesare diede fuoco al porto di Alessandria, nel 47 a.C.). Essi resistettero alla fine di Alessandria come luogo di studio, una fine segnata dal brutale assassinio della matematica neoplatonica Ipazia (370-415 d.C.) nel marzo 415. Sentendosi minacciati dal suo carisma e dalla forza dei suoi insegnamenti, una folla delirante di cristiani la spogliarono e la scarnificarono, cercando cosi di cancellare la sua autorevolezza, la sua bellezza e la sua erudizione. Ma non ci riuscirono. Dopo la sua morte, l'edizione degli *Elementi* alla quale Ipazia aveva lavorato assieme a suo padre Teone (335-c. 405 d.C.) divenne la versione ufficiale dell'opera euclidea. Questa edizione fu la base del testo che il califfo al-Mansur (712-775 d.C, regnante dal 754 al 774) ricevette dall'imperatore bizantino e che il grande traduttore arabo al-Hajjaj (c. 786-833 d.C.) avrebbe in seguito volto nella sua lingua non una, ma due volte.[7] Gli studiosi arabi erano affascinati dagli *Elementi* come lo erano stati i greci, e questi vennero ritradotti, ricopiati centinaia di volte e ne vennero fatti innumerevoli commentari e sommari.

Qualche secolo dopo, gli *Elementi,* insieme a numerosi testi di Aristotele, furono tra le primissime opere greche a essere riadattate dall'arabo in latino. Pare che la prima di queste traduzioni sia stata fatta da Gherardo da Cremona (1114-1187). Giovanni Campano, un cappellano di Urbano IV (papa dal 1261 al 1281), compì a sua volta questa operazione. Il fiorire delle traduzioni di testi classici da parte di Gherardo e altri studiosi medioevali coincise con l'emergere delle più antiche università d'Europa: Bologna, Parigi, Oxford, Cambridge e Salamanca. Euclide, in un certo senso, risiede nel cuore delle nostre università.[8]

Gli *Elementi* furono il primo testo scientifico a essere pubblicato dopo l'avvento della stampa, verso la metà del XV secolo.[9] Essi vengono comunemente ritenuti il secondo libro più letto nella storia dell'umanità.[10] Tuttavia, se consideriamo che vennero tradotti in cinese nel 1607 ed erano penetrati nel subcontinente indiano fin dal X secolo, allora stiamo forse parlando del testo più letto di tutti i tempi. Se teniamo presente che i suoi unici rivali sono la Bibbia e il Corano, la cosa ci colpisce ancora di più.

La costante popolarità degli *Elementi* nel corso dei secoli ci suggerisce che essi rispondano a un bisogno profondo dell'uomo. Molti hanno esaltato il salutare effetto del loro studio sullo sviluppo della capacità di ragionamento. Quand'era al Congresso, Abraham Lincoln li leggeva ogni sera prima di addormentarsi. Thomas Jefferson suggerì a un giovane studioso che avrebbe trovato i risultati più utili negli ultimi libri. Altri teorizzarono che Euclide fosse particolarmente utile alle giovani donne: nel lontano 1838, il Mount Holyoke College — il più antico college femminile degli Stati Uniti — richiedeva alle sue studentesse di possedere e studiare l'Euclide di Simson o quello di Playfair.[11]

Nonostante la sopravvivenza e la popolarità degli *Elementi,* in realtà non abbiamo idea di come fosse l'originale. Ciò si potrebbe dire di ogni libro di quell'epoca: prima dell'invenzione della stampa, infatti, i documenti erano ricopiati a mano, con tutti gli errori introdotti che si accumulavano trascrizione dopo trascrizione. Per un libro ampiamente copiato come gli *Elementi,* la cosa assumeva una rilevanza notevole. La complessità della trasmissione dell'opera euclidea fino ai giorni nostri eccede di gran lunga quella di ogni altro testo antico.[12] Migliaia di intellettuali e di matematici li hanno studiati, arricchendoli di numerose note e ricopiandoli in modi che a loro sembravano più chiari: pertanto esiste una grande abbondanza di differenti edizioni, adattamenti e traduzioni.

Per molto tempo si è pensato che l'edizione araba standard *fosse* di fatto più antica delle edizioni greche in circolazione. Tuttavia, nel 1808, François Peyrard affermò che una copia manoscritta greca degli *Elementi* che era stata conservata nella Biblioteca Vaticana e quindi portata a Parigi da Napoleone era in realtà anteriore. L'indizio cruciale consisteva in un'affermazione che Teone aveva fatto nel suo commentario *all'Almagesto* di Tolomeo, indicando di aver aggiunto del materiale all'ultima proposizione del sesto libro degli *Elementi.* Il manoscritto vaticano non conteneva tale aggiunta. Peyrard proseguì il suo lavoro correggendo l'allora autorevole edizione greca (che era stata preparata da Simone Grineo a Basilea, nel 1533).

Nel 1883-84, lo studioso danese J. L. Heiberg pubblicò una ricostruzione molto erudita dell'opera, ripartendo da zero con il testo originale greco basato sul manoscritto vaticano e altri documenti autorevoli. Non c'è dubbio sul fatto che il risultato del lavoro di Heiberg sia più autentico rispetto alla versione attribuita a Teone e Ipazia, e la sua è la versione da cui oggi partono la maggior parte degli studiosi. Essa costituisce la base della traduzione standard inglese, preparata da Thomas Heath nel 1908. Nonostante tutti gli studi di Heiberg, però, non sappiamo quanto il manoscritto vaticano sia di fatto più vecchio della redazione di Teone e Ipazia. Quest'ultimo testo apparve sette secoli dopo gli *Elementi di* Euclide. La versione vaticana potrebbe essere apparsa diversi secoli prima di quella teoniana, ma aver poi assorbito centinaia d'anni di cambiamenti nelle trascrizioni. Per quanto ne sappiamo, la ricostruzione di Heiberg potrebbe anche differire molto dall'originale di Euclide.

La cosa che affascina maggiormente a proposito degli *Elementi* non è la loro maestosità, quanto piuttosto la loro contingenza. Ciò che conta non è infatti il testo in sé e di fatto, per quanto possa sembrare il contrario, non è questo ad aver attraversato i secoli. Ciò che conta è la curiosità generata dall'argomento, la volontà di mettere in discussione il sapere ricevuto e il modo in cui la conoscenza degli uomini procede gradualmente costruendosi sul lavoro fatto da altri. Praticamente ogni singola parola e ogni singola riga degli *Elementi* hanno ricevuto ampia attenzione da parte di migliaia di commentatori. Sono state proposte formulazioni alternative delle frasi, sono state suggerite dimostrazioni differenti. I teoremi sono conosciuti in diverse parti del mondo con soprannomi differenti. Per esempio, la proposizione 5 è nota in Inghilterra e altrove con il soprannome latino di *pons asinorum* («Ponte degli asini»). La proposizione 47, oggi nota come il

teorema di Pitagora, era stata in passato indicata come «Teorema delle nozze» o «Teorema della sposa».[13] Il commentario più completo che ci sia giunto dall'antichità è quello di Proclo (410-485) che, a sua volta, sembra essersi rifatto a non meno di quattro grandi commentari scritti in precedenza, andati tutti perduti eccetto qualche frammento (a ulteriore riprova della fragilità delle opere individuali).[14] Gli *Elementi* sono un leitmotiv a prova dell'intraprendenza umana, della nostra dipendenza gli uni dagli altri e dell'incertezza delle conquiste dei singoli individui. Rispetto alla congettura di Poincaré, ciò che più ci interessa a proposito degli *Elementi è* il quinto postulato e il modo in cui esso ha ceduto il passo alla nostra attuale comprensione dello spazio.

6
I non-euclidei

Comprendere che cosa significa dire che lo spazio è curvo è di fondamentale importanza per capire la dimostrazione di Perelman della congettura di Poincaré. Ma per comprendere il concetto di «curvatura» è a sua volta necessario definire con assoluta chiarezza che cosa può dirsi diritto o piatto. A tal fine, non ci bastano solo gli *Elementi,* ma dobbiamo anche prendere in esame le elaborate riflessioni che sono state fatte su di essi nel corso di più di due millenni. Più precisamente, la comprensione delle apparentemente innocue nozioni di esser diritto ed esser piatto ci richiede di dipanare il problema implicito nel quinto postulato del primo libro della grande opera di Euclide.

Il quinto postulato

L'enunciazione del quinto postulato di Euclide ha dato grattacapi fin dal principio:

> Se in un piano una retta, intersecando due altre rette, forma con esse, da una medesima parte, angoli interni la cui somma è minore di due angoli retti, allora queste due rette indefinitamente prolungate finiscono con l'incontrarsi dalla parte detta.

Guardiamo l'elenco dei cinque postulati riportato alle pp. 72 e 73. I primi quattro vengono enunciati in meno di una riga. Non così il quinto. Euclide deve averci pensato e ripensato a lungo prima di aggiungerlo al suo elenco, e non può esserne rimasto soddisfatto. Si trattiene dall'usarlo il più a lungo possibile (fino alla proposizione 29), e per buone ragioni. Gli altri postulati sono chiari, facili da enunciare e palesemente evidenti. Il quinto, al contrario, sembra complicato e disarmonico e in quanto tale fu oggetto di critiche. Bisogna leggerlo un paio di volte per capire che cosa sta affermando.

Per riformularlo in termini più familiari, teniamo presente che una rotazione completa (o angolo giro) consiste, per convenzione, di 360 gradi. Un quarto di giro, o angolo retto, misura 90 gradi, e due angoli retti fanno un angolo piatto di 180 gradi. Il quinto postulato afferma che se prendiamo una retta, che possiamo assumere sia verticale, e quindi altre due rette che la intersecano in modo tale che la somma degli angoli interni (A e B nella figura 18) dalla parte destra sia minore di 180 gradi, allora le due rette finiranno per incontrarsi in un punto situato dalla parte destra.

«Questo non è un postulato, è un teorema» si lamentò Proclo, e cercò di dimostrarlo. Frustrato, raccontò le difficoltà incontrate dal grande geografo Tolomeo nello sforzo di provarlo. Tolomeo aveva dedicato un libro, oggi perduto, al tentativo di dimostrare il quinto postulato. Come sottolineò Proclo, e come Euclide indubbiamente sapeva, il quinto postulato è equivalente a quell'enunciato che solitamente indichiamo come il «postulato delle parallele»:

> Data una qualsiasi retta *r* e un punto P non appartenente alla retta stessa, è possibile tracciare una e una sola retta parallela a *r* passante per P

Questo assioma viene spesso chiamato «postulato di Playfair», dal momento che Playfair lo prese come una variante del quinto postulato nella sua edizione degli *Elementi* di Euclide.[1]

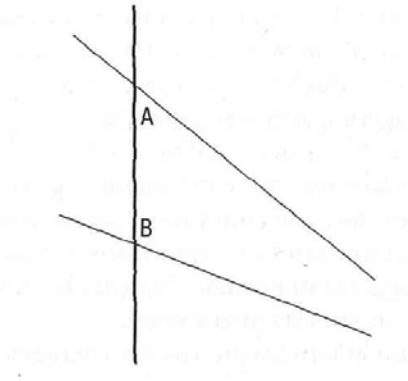


Figura 18: Dato che la somma degli angoli A e B è minore di 180 gradi, le due rette che intersecano la retta verticale devono infine incontrarsi in un punto situato alla sua destra.

Euclide potè avvantaggiarsi di un profondo dibattito portato avanti dai greci intorno all'esistenza delle parallele. Queste discussioni sono andate in massima parte perdute, ma sappiamo che ci furono perché Aristotele si lamentò della circolarità di molte di quelle argomentazioni. Egli *sottolineò* che molti ragionamenti volti a mostrare l'esistenza delle parallele ricorrevano a fatti in realtà equivalenti all'esistenza delle parallele stesse e, quindi, assumevano tacitamente in partenza quello che avrebbero dovuto invece dimostrare. Nelle sue parole: «Il caso si presenta, ad esempio, quando A venga provato mediante B, B sia provato mediante C, e C d'altro canto sia naturalmente costituito per venir provato mediante A. In realtà, quando *si* compiono tali deduzioni, è necessario che A, come tale, venga provato mediante se stesso. Ed è proprio questo l'errore commesso da coloro che ritengono di tracciare delle rette parallele: essi infatti non si accorgono di assumere delle premesse tali da non poter essere dimostrate, a meno che le rette non si presuppongano come parallele».[2]

Ciononostante, va comunque ammirato il coraggio manifestato da Euclide nel redigere il suo elenco. La maggior parte delle persone si sarebbero bloccate di fronte a questa difficoltà. Euclide, invece, prese il toro per le corna e proseguì assumendo questo postulato, lasciandoci *così* un capolavoro.

Anche gli arabi divennero ossessionati dal quinto postulato, e cercarono di dedurlo dagli altri quattro o di sostituirlo con qualcos'altro. Ma fu tutto inutile. Essi, comunque, introdussero molte nuove tecniche matematiche che semplificarono i calcoli e resero l'algebra indipendente dalla geometria.

Tuttavia, le domande intorno al quinto postulato restavano sempre in agguato. Era possibile dedurlo dagli altri? O, forse, c'era un enunciato più evidente che avrebbe potuto esser preso come un assioma? La scienza come la conosciamo oggi è emersa nel XVII secolo, e il suo sviluppo è stato accompagnato da un'esplosione di scoperte matematiche. In questa atmosfera febbrile, il quinto postulato divenne per molti un chiodo fisso. John Wallis, il predecessore di Newton, prese in esame la letteratura critica su questo problema nel suo libro *De postulato quinto*. Fra il 1607 e il 1880 vennero pubblicate ben più di mille monografie dedicate al quinto postulato. Furono compiuti una serie di tentativi molto seri di dimostrarlo e vennero annunciate diverse prove, ma nessuna di esse fu in grado di reggere a un esame attento.

Molti tentativi di dimostrazione furono semplicemente grandiosi. Fra i più spettacolari ci fu quello di Gerolamo Saccheri (1667-1733), un gesuita e professore all'Università di Pavia che investigò numerosi postulati equivalenti al quinto assumendo che fossero falsi. Per esempio, egli mostrò accuratamente che il quinto postulato era equivalente all'affermazione secondo cui la somma degli angoli interni di un triangolo è uguale alla somma di due angoli retti (ossia, 180 gradi), e prese in esame i due casi in cui la somma degli angoli era rispettivamente più grande e più piccola di due angoli retti, sperando di giungere in tal modo a una qualche contraddizione. Arrivò persino al punto di convincersi di averne scoperta una.[3]

Con l'Illuminismo e l'ascesa della scienza vennero fondate nuove università. Una delle più grandi, l'Università di Gottinga, fu fondata nel 1737 da Giorgio II, re d'Inghilterra e principe elettore di Hannover.[4] Creata nello spirito dell'Illuminismo, fu una delle prime istituzioni in cui le facoltà scientifiche godevano di una posizione di eguaglianza (e non di sudditanza) rispetto a quella di teologia. Uno dei docenti che vi insegnarono, il matematico Abraham Kästner (1719-1800), che era interessato alla storia e ai fondamenti della matematica, scrisse la seguente prefazione alla sua celebre opera in quattro volumi *Mathematische Anfangsgründe* (Princìpi di matematica):

> Le difficoltà che emergono nella teoria delle rette parallele mi hanno tenuto impegnato per anni. Un tempo credevo che fossero state completamente risolte dagli *Elementa, matheseos* [1734] di Hausen. L'ex predicatore della congregazione francese a Lipsia, Coste, mi scosse dal mio compiacimento quando, durante una delle nostre passeggiate, accennò al fatto che nell'opera summenzionata di Hausen compare un'inferenza scorretta. Ben presto mi resi conto io stesso dell'errore, e da quel momento mi impegnai a risolvere la difficoltà o a trovare un autore che l'avesse risolta; entrambi gli sforzi si rivelarono vani, ma mi permisero comunque di mettere assieme una piccola biblioteca di scritti sui primi princìpi della geometria nei quali questo problema veniva affrontato con particolare attenzione.[5]

Al posto del quinto postulato, Kästner adottò un assioma equivalente formulato da Wallis.[6] Un allievo di Kästner, G. S. Klügel, nel 1763 scrisse una tesi in cui esaminò circa 30 dimostrazioni del quinto postulato. In ognuna di esse individuò qualche errore, e concluse dicendo: «Occorre ammettere che, in linea di principio, è forse possibile che due rette che non si intersecano divergano l'una dall'altra. Noi sappiamo che una cosa del genere è assurda non per via di una rigorosa inferenza o servendoci di chiari concetti di linee rette e curve, ma piuttosto attraverso l'esperienza e il giudizio dei nostri occhi».[7]

La dissertazione di Klügel spinse un amico di Kästner, l'ingegnoso Heinrich Lambert (1728-77), a interessarsi di questo argomento. Lambert era nato in una famiglia numerosa e le necessità economiche lo avevano costretto a seguire suo padre nel lavoro di sarto. Egli continuò tuttavia a studiare nel tempo libero e, alla fine, si guadagnò un incarico come precettore nella famiglia di un nobile svizzero, un lavoro che gli garantiva la possibilità di dedicarsi alle sue ricerche. Lambert era tanto brillante quanto eccentrico. Vestiva in modo bizzarro, e decise che il modo migliore per parlare con qualcuno non era quello di stare faccia a faccia, ma di mettersi ad angolo retto l'uno rispetto all'altro. Il leggendario matematico svizzero Leonhard Euler (1707-83) propose con entusiasmo il suo nome per un incarico all'Accademia prussiana delle scienze di Berlino. All'inizio, però, Federico II non era affatto convinto del suo valore: si narra che, dopo averlo incontrato, abbia riferito a un amico di aver appena conosciuto la più grande testa di legno di tutta la Prussia. Il monarca cambiò tuttavia ben presto opinione, imparando ad apprezzare l'intelligenza di Lambert. Personaggio piuttosto curioso, Lambert avrebbe portato grandi contributi nei campi dell'ottica, della cosmologia, della filosofia e della matematica.[8] Fra gli altri, scrisse un saggio sul postulato delle parallele, *Theorie der Parallellinien,* che scrisse nel 1766; tuttavia, non essendo riuscito a trovare una soluzione per lui soddisfacente del problema, non lo diede alle stampe. Venne comunque pubblicato postumo nel 1788.

Come Saccheri (il gesuita di Pavia), anche Lambert esplorò le conseguenze di assumere la falsità di alcuni risultati equivalenti al quinto postulato. In particolare, egli ottenne le formule per l'area di un triangolo in relazione alla somma dei suoi angoli interni nei casi in cui la somma degli angoli di un triangolo sia maggiore o minore di due angoli retti. Egli notò che sulla sfera, considerando come linee rette i cerchi massimi, la somma degli angoli interni dei triangoli misurava più di 180 gradi, e la sua formula gli indicava l'area corretta dei triangoli stessi. (In realtà questo risultato, inclusa la formula, era già noto ai greci.) Lambert si chiese poi se, su una superficie immaginaria appropriata, la somma degli angoli potesse essere minore di due angoli retti (menzionò anche delle sfere il cui raggio ha a che fare con radici quadrate di numeri negativi).

La fine del XVIII secolo

Nel 1800, le idee dell'Illuminismo erano ormai penetrate ovunque. I semi piantati da Descartes, Galileo e Newton erano giunti a maturazione. Nell'aria circolavano una nuova fiducia nell'intelligenza e una fede nelle capacità della ragione umana e della scienza. Per la prima volta dai tempi dei filosofi ionici e della scuola alessandrina, l'universo era nuovamente visto come qualcosa di comprensibile. Le società scientifiche che si erano formate negli anni precedenti, molte delle quali con il supporto di despoti illuminati, avevano messo radici. In aggiunta a queste, e alle vecchie università, erano state fondate nuove istituzioni dedicate agli studi più avanzati, per venire incontro alle esigenze di un'era sempre più complessa.

Le idee scientifiche dell'epoca e i loro riflessi nel campo della filosofia e dell'arte diedero forma a una visione del mondo secondo la quale l'universo funzionava in accordo a una serie di leggi matematiche che l'uomo poteva conoscere. *«Sapere aude!* Abbi il coraggio di servirti della *tua propria* intelligenza! — è dunque il motto dell'Illuminismo» scrisse il grande filosofo tedesco Immanuel Kant (1724-1804).[9] «Noi riteniamo che queste verità siano di per sé evidenti» proclamava la Dichiarazione americana d'indipendenza del 1776. Alcune verità sono di per sé evidenti, e tutte sono comunque accessibili alla ragione e alla deduzione. Fra queste, secondo Kant, ci sono le proposizioni della geometria di Euclide, e il fatto che tali proposizioni si applicano al nostro universo. Sui palcoscenici di tutta Europa, due personaggi del *Flauto magico* di Mozart cercavano l'ammissione a una confraternita — era evidente il riferimento ai pitagorici —, che predicava l'amore universale e la ragione.

In questo clima generale, l'incertezza che circondava il quinto postulato era come un noioso raffreddore: persistente e anche un po' imbarazzante. Nessuno dubitava seriamente della verità del postulato, anche se alcuni ammettevano che forse sarebbe stato necessario invocare qualche principio più semplice, ancora da scoprire. «Uno scandalo» sbuffava il sempre irritabile matematico ed enciclopedista francese Jean d'Alembert (1717-83). Mentre tutti si aspettavano che prima o poi questa impasse sarebbe stata superata, la maggior parte degli studiosi si rendeva anche conto che investire il proprio tempo in una seria indagine del problema era un lavoro che prometteva una ben magra ricompensa.

Adrien-Marie Legendre (1752-1833), un compatriota di d'Alembert, fu uno dei matematici di grande talento che lanciarono la loro sfida al quinto postulato. I suoi *Éléments de géométrie,* che semplificavano e modernizzavano gli *Elementi* di Euclide, furono pubblicati nel 1794 e divennero la più importante trattazione avanzata della geometria elementare per i 100 anni successivi, in cui avrebbero avuto numerose riedizioni. Nel corso dei seguenti trent'anni, Legendre avrebbe cercato di dimostrare il postulato delle parallele, sperimentando diversi tentativi che comparvero nelle differenti edizioni. I suoi sforzi fallirono, ma lui morì comunque fermamente convinto della verità del quinto postulato.

Mentre il XVIII secolo si avviava alla conclusione, il pensiero illuminista, la rapida trasformazione economica e una popolazione sempre più istruita mettevano crescentemente in discussione le idee ereditate. La Dichiarazione di indipendenza abbracciò i diritti di ogni individuo, in particolare alla libertà e all'istruzione. I primi cambiamenti sociali forgiati dall'Illuminismo stavano lasciando il posto alle trasformazioni più sregolate ed esplosive che avrebbero segnato la nostra epoca. I tumulti sociali spazzavano l'Europa con diversi, imprevedibili effetti. Si aprivano nuove possibilità, ma le vecchie certezze del passato erano svanite. Gli europei guardarono atterriti l'imporsi (dal 1789) della Rivoluzione francese, che lavò via il vecchio ordine in un bagno di sangue. Non c'era più nulla di sacro. Gli eserciti guidati dai parenti dei monarchi francesi giustiziati dai rivoluzionari, Luigi XVI e Maria Antonietta, attaccarono la Francia, creando così le condizioni che consentirono a Napoleone di contrattaccare, di ascendere al trono e di conquistare (a partire dal 1805) gran parte dell'Europa.

Gauss, -Lobačevskij, Bolyai

Tre individui — Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Nikolaj Ivanovič Lobačevskij (1792-1856) e János Bolyai (1802-60) — avrebbero infine chiarito il ruolo del quinto postulato e le ricchezze da esso celate.

Gauss fu il più famoso matematico dei primi decenni del XIX secolo e uno dei più grandi di tutti i tempi.[10] Suo padre era un manovale che aveva frequentato soltanto le elementari e che svolse per tutta la vita una serie di lavori umili. Sua madre era una cameriera ancor meno istruita. La famiglia si era trasferita dalla campagna alla città di Brunswick, nell'odierna Germania. Pochi anni prima, un ragazzo come Gauss non avrebbe avuto nessuna possibilità di ricevere un'istruzione seria. La sua classe alle scuole primarie era composta da ben 50 alunni, ma lui si distinse da subito. Ancora prima di iniziare a frequentare la scuola, aveva già imparato per suo conto — apparentemente senza nessun intervento da parte dei genitori — a leggere e scrivere. La sua (e la nostra) fortuna fu che l'assistente del maestro, Martin Bartels, per quanto avesse solo otto anni più di Gauss, aveva studiato matematica a Gottinga. Bartels dedicò particolare attenzione all'alunno, e prese accordi con il maestro perché il ragazzo potesse frequentare il ginnasio, una delle rigorose scuole superiori tedesche pensate per gli allievi che volevano prepararsi agli studi più avanzati. Tre anni dopo, Gauss venne presentato al suo principe, il duca di Brunswick-Wolfenbüttel, che in seguito gli concesse un regolare sussidio. Questi contributi elargiti ai giovani promettenti ma economicamente bisognosi non erano una cosa insolita, ed erano i precursori delle attuali borse di studio accademiche. Essi costituivano un oculato investimento, data la necessità, da parte del governo, di una forza lavoro sempre più istruita. Questo stipendio permise a Gauss di proseguire i suoi studi, dapprima in un'accademia d'elite,[11] di orientamento scientifico, istituita da poco a Brunswick (1792-95), e quindi all'Università di Gottinga (1795-98), circa 100 chilometri più a sud, in quello che allora era lo Stato straniero di Hannover.

A Gottinga, Gauss incontrò Farkas Bolyai (1775-1856), il futuro padre di János Bolyai. I due formavano una coppia improbabile. Farkas (chiamato anche Wolfgang) proveniva da una famiglia un tempo ricca (e poi decaduta) con alle spalle una lunga storia di guerre contro i turchi. Il padre di lui aveva conservato una piccola tenuta, ma il denaro di famiglia si era volatilizzato. Farkas aveva abbandonato la scuola all'età di dodici anni e doveva la sua frequentazione dell'università al fatto di essere stato nominato precettore di Simon Kemený, figlio (di otto anni d'età) del barone Kemený. Farkas e Simon divennero poi grandi amici, e il barone acconsentì a mandarli entrambi a studiare a Gottinga. Gauss e Farkas frequentarono il corso di Abraham Kästner, quel matematico che, come abbiamo appena visto, nutriva un profondo interesse per il quinto postulato. All'epoca Kästner aveva quasi ottant'anni e si era ormai lasciato alle spalle gli anni più dinamici delle sue lezioni. Gauss saltò buona parte del corso di Kästner, trovandolo troppo elementare, e si dice anche che amasse prendersi gioco di lui. Dopo le lezioni, Farkas e Gauss discutevano degli assiomi di Euclide e della possibile indipendenza del postulato delle parallele, oltre che di altre questioni di matematica. Il primo era attratto da questi problemi e anche Gauss vi rimase interessato per tutta la vita. Senza dubbio, egli aveva già sentito parlare delle questioni legate al quinto postulato da Martin Bartels, che aveva a sua volta seguito i corsi di Kästner.

Gauss e Bolyai completarono i loro studi nel 1798 e Gauss ritornò a casa, ancora privo del diploma e incerto sul proprio destino. Con l'appoggio del duca, Gauss conseguì la laurea nel 1799 e presentò una dissertazione di dottorato presso l'Università di Helmstedt, l'ateneo locale sovvenzionato dal duca stesso. Il suo primo libro, *Disquisitiones Arithmeticae,* apparve nel 1801 e fu da subito riconosciuto come un capolavoro. Ma fu solo l'anno seguente che Gauss divenne realmente famoso. Nel giugno 1801, uno dei più grandi astronomi tedeschi aveva pubblicato le posizioni orbitali dell'asteroide Cerere: era stato scoperto il I gennaio, e l'11 febbraio era scomparso dietro il Sole. Secondo le aspettative di tutti, sarebbe dovuto ricomparire negli ultimi mesi del 1801 o all'inizio del 1802, ma nessuno sapeva prevedere dove. All'epoca, il problema centrale in materia era il calcolo delle orbite dei corpi celesti a partire da un piccolo numero di osservazioni

astronomiche, ognuna delle quali implicava degli errori. Gauss usò una tecnica che non era stata inventata da lui, ma ai tempi risultava inedita, per calcolare una predizione orbitale che si discostava molto da quelle di altri astronomi. Quando Cerere riapparve proprio dove e quando lui aveva previsto, Gauss si ritrovò coperto dalla fama.

Egli ricevette immediatamente un'offerta per diventare direttore dell'osservatorio di San Pietroburgo, ma la città di Brunswick aveva già iniziato la costruzione di un osservatorio a lui destinato. Gli astronomi tedeschi cercarono di trattenere Gauss, prospettandogli una cattedra all'Università di Gottinga. Anche lì gli promisero che avrebbero costruito una struttura appositamente per lui, e che gli avrebbero fornito un assistente di talento. Gauss accettò quest'ultima proposta nel 1805, si sposò e rifiutò le offerte di San Pietroburgo e della Baviera. Il suo tempismo non avrebbe potuto essere migliore. All'età di settant'anni, il suo protettore, il duca di Brunswick-Wolfenbüttel, era stato messo a capo delle forze prussiane ed era stato mortalmente ferito nella battaglia di Jena contro Napoleone. Anche se lo Stato di Hannover passò di mano, diventando parte del regno di Vestfalia (dominato dalla Francia), i francesi si rivelarono abili amministratori e l'Università di Gottinga continuò a prosperare.

Le cose andarono diversamente per il vecchio amico di Gauss, Farkas Bolyai.[12] Il suo protettore, il barone, dovette affrontare gravi problemi economici e riuscì appena a racimolare la somma di denaro per pagare il viaggio di ritorno di suo figlio Simon. Rovinato, Farkas si fermò a Gottinga per un anno, vivendo grazie a prestiti ed elemosine di amici. Alla fine, uno di questi gli mandò abbastanza denaro per ripagare i suoi debiti e lui tornò a piedi fino in Ungheria. Lì accettò con riluttanza un lavoro mal pagato e che gli prendeva molto tempo come insegnante di matematica, fisica e chimica presso il collegio calvinista di Marosvásárhely. Si sposò nel 1801 e un anno dopo, nel dicembre 1802, nacque suo figlio János. Sembra che sua moglie soffrisse di gravi attacchi di ansia e che col passare degli anni e il deteriorarsi della sua salute fosse divenuto sempre più difficile vivere con lei. Per arrotondare il proprio stipendio, Farkas prendeva dei lavori extra: scrisse e pubblicò drammi teatrali, gestì la birreria del collegio e progettò tegole e stufe di ghisa. Nonostante tutti questi impegni, nel suo tempo libero continuò comunque a dedicarsi alla matematica.

Farkas investì completamente su suo figlio, che mostrava di essere particolarmente brillante e che lui avrebbe voluto che diventasse un matematico. Diede lezioni private a János fino all'età di nove anni, lo fece seguire da studenti del collegio e continuò a integrare la sua formazione scientifica anche dopo il suo ingresso nel ginnasio. All'età di tredici anni, János suonava il violino come un professionista, padroneggiava il calcolo infinitesimale e la meccanica analitica e parlava diverse lingue. Farkas, però, non aveva i soldi per assicurargli un'istruzione universitaria di prim'ordine. Nel 1816 scrisse così a Gauss, chiedendogli se János avrebbe potuto andare a vivere da lui e studiare matematica. Non se ne fece nulla, e padre e figlio decisero quindi che il meglio che avrebbero potuto ottenere sarebbe stata l'iscrizione all'Accademia di ingegneria di Vienna. János completò in soli quattro anni i sette anni di corso previsti per gli studi di ingegneria militare e, in seguito, servì per 11 anni nelle fila dell'esercito austro-ungarico, dove si conquistò la fama di miglior spadaccino e ballerino dell'intero esercito imperiale.[13]

Quegli stessi venti di cambiamento illuminista che stavano favorendo le sorti di Gauss e colpendo quelle della famiglia Bolyai soffiavano con eguale vigore anche nelle regioni più orientali d'Europa. Il padre di Nikolaj Ivanovič Lobačevskij, un impiegato di un ufficio di rilevamenti topografici di Nizhny Novgorod (in Russia), morì quando il figlio aveva solo sette anni, lasciando sua moglie con tre bimbi piccoli e neanche un soldo. La donna si trasferì con la famiglia a Kazan, ai margini della Siberia, dove i bambini frequentarono il ginnasio grazie a una borsa di studio statale che finanziava l'istruzione dei ragazzi poveri ma dotati. Lobačevskij proseguì gli studi all'Università statale di Kazan, che era appena stata fondata nel 1805 in seguito a una delle riforme dello zar Alessandro I di Russia. Fra i primi professori assunti dall'ateneo ci fu quello stesso Martin Bartels che era stato l'assistente del maestro elementare di Gauss. Insegnante di talento, Bartels attirò Lobavevskij — che in origine era intenzionato a dedicarsi alla medicina — verso la materia. Nel suo corso sulla storia della matematica, Bartels usava un testo che discuteva del quinto postulato — cosa che avrebbe avuto una fatale influenza sul futuro del suo giovane allievo.

Lobačevskij si laureò nel 1811 e salì progressivamente di grado fino a diventare professore ordinario undici anni dopo. Il servizio in un comitato gli aprì la strada per diventare preside dei dipartimenti di matematica e fisica, poi capo bibliotecario, quindi direttore dell'osservatorio e, infine, rettore dell'ateneo. Amministratore di talento, guidò l'Università di Kazan attraverso i tempi difficili degli ultimi anni di regno dello zar (1819-26), che videro un ritorno al dispotismo, una sfiducia verso il pensiero illuminista e l'allontanamento di alcuni dei migliori professori, tra cui lo stesso Bartels. Nel periodo di accresciuta tolleranza che accompagnò invece l'ascesa al trono di Nicola I, nel 1826, Lobačevskij divenne il principale innovatore dell'università, ripristinando elevati standard accademici e morali del corpo docente.

Negli anni Venti dell'Ottocento, Lobačevskij (a Kazan) e Farkas Bolyai (a Marosvásárhely) lavoravano lontano da ogni grande centro matematico e dedicavano gran parte del loro tempo libero allo studio del quinto postulato. Anche Gauss continuò a nutrire un forte interesse per la geometria. In una lettera a Bolyai, egli sottolineò che una dimostrazione del quinto postulato proposta dallo stesso Bolyai non era corretta. Nel 1816, scrisse una recensione di un libro nella quale criticava diverse presunte prove del fatto che tale postulato potesse essere dedotto dagli altri.

Gauss aveva una forte inclinazione pratica. Dopo il 1815, tutti i grandi Stati dell'Europa centrale stavano finanziando delle misurazioni geodetiche, rilevamenti finalizzati a mappare grandi aree geografiche apportando le necessarie correzioni in base al valore della curvatura terrestre. Nel 1818, Gauss divenne il direttore di un grande progetto volto a fare il rilievo topografico di Hannover e Brema e collegare queste indagini con un'analoga ricerca danese. Le terre costiere, piatte e ricche di foreste, davano molte difficoltà. Non era possibile trovare un numero di punti elevati sufficienti per eseguire con accuratezza triangolazioni e misurazioni. La realizzazione di questo lavoro occupò gran parte del tempo di Gauss dal 1818 al 1832. Nel corso dell'operazione, comunque, egli portò notevoli contributi alla geodesia.

Questo lavoro stimolò inoltre l'interesse di Gauss per la geometria differenziale, la disciplina che si serve del calcolo infinitesimale per studiare la geometria. Nel 1823 pubblicò un articolo (che vinse un premio) in cui discuteva le corrispondenze biunivoche tra le superfici in cui la misura degli angoli viene preservata. Cinque anni dopo, presentò le proprie idee sull'argomento nello splendido, piccolo libro *Disquisitiones generales circa superficies curvas,* compiendo sostanziali progressi sulla strada tracciata da Euler e altri. Il testo non faceva menzione del quinto postulato e rimaneva solidamente ancorato alla matematica ufficiale. In esso, Gauss calcolò le equazioni per misurare le distanze su superfici arbitrarie nel 3-spazio. Egli definì una nozione, oggi nota come «curvatura gaussiana», che misura appunto la curvatura di una superficie, e mostrò che questo valore può essere calcolato a partire da misurazioni prese solo sulla superficie e che non è necessario abbandonare la superficie stessa. Gauss scoprì inoltre che esiste un rapporto fra le aree dei triangoli su una superficie e la curvatura media all'interno dei triangoli stessi.

Oltre il quinto postulato

Sembra che verso la metà degli anni Venti dell'Ottocento, e forse anche prima, Gauss si fosse convinto della possibilità di costruire geometrie alternative nelle quali il quinto postulato non valeva. Nel novembre 1824, egli scrisse al suo amico Taurinus:

> L'assunzione secondo cui la somma dei tre angoli di un triangolo è minore di 180 gradi conduce a una geometria curiosa, profondamente diversa dalla nostra [quella euclidea] ma in sé del tutto coerente, che ho sviluppato traendone grande soddisfazione, al punto che ora sono in grado di risolvere ogni suo problema eccetto la determinazione di una costante, che non può essere stabilita a priori [...] I tre angoli di un triangolo diventano piccoli a piacere, se solo si prendono dei lati sufficientemente lunghi, e tuttavia l'area del triangolo non può mai eccedere, o anche raggiungere, un certo limite, indipendentemente dalla lunghezza dei lati.[14]

Gauss non aveva senz'altro nessuna intenzione di pubblicare affermazioni simili. Per quanto godesse di una fama mondiale e fosse ben inserito nel mondo della matematica, egli si mantenne in una sorta di isolamento autoimposto. Individuo conservatore, Gauss, che era consapevole della buona sorte che aveva avuto e avvertiva costantemente un po' di insicurezza nella propria posizione, era particolarmente attento a non offendere coloro che detenevano il potere. Il rapporto di Gauss con suo padre non era stato molto intenso. La sua prima moglie era morta nel 1808, solo tre anni dopo il loro matrimonio, mentre dava alla luce il loro terzo figlio. Egli sposò quindi la migliore amica della defunta, dalla quale ebbe altri tre bambini, ma questo secondo matrimonio non fu mai caloroso come il primo. I suoi rapporti con i figli erano difficili. Sembrava distante, era un tipo solitario e aveva pochi amici. Anche il celebre esploratore e statista tedesco Alexander von Humboldt, che era in cordiali rapporti con molti scienziati, descrisse il matematico come un individuo glaciale.

Gauss sapeva che la pubblicazione dei suoi risultati sul quinto postulato avrebbe fatto scalpore, e non voleva questo genere di pubblicità o i fastidi a essa connessi. Nel corso degli anni, l'interesse per la questione si era fatto strada anche in filosofia e nella stampa divulgativa. Gauss era consapevole di quanti libri e articoli erano stati dedicati a questo problema, e quanti tipi strani attendevano di venire allo scoperto. Egli, inoltre, nutriva un personale sospetto nei confronti dei filosofi: «Quando un filosofo dice qualcosa di vero, si tratta di una banalità. Quando dice qualcosa che non sia banale, allora si tratta di una falsità».[15]

Nel frattempo, nel 1820 János Bolyai comunicò a suo padre che stava lavorando sul quinto postulato. Allarmato, Farkas gli rispose cercando di dissuaderlo:

> Ti scongiuro, non tentare di padroneggiare la teoria delle parallele: finirai per perdere su di essa tutto il tuo tempo [...] Non ci provare [...] né con i metodi che hai menzionato, né con qualsiasi altro [...] Sono passato anch'io per questo abisso senza fondo, che ha spento ogni luce e ogni gioia della mia vita. Per l'amor del cielo, ti prego di lasciar perdere. Devi temerlo non meno delle passioni dei sensi, poiché anch'esso ti può portar via tutto il tuo tempo, deprivandoti della salute, della serenità di spirito e della felicità.[16]

Parole forti, che riflettevano l'amara esperienza che Bolyai padre aveva attraversato.

Dapprima, János cercò di sostituire il quinto postulato di Euclide con un enunciato differente che potesse essere dedotto dagli altri; abbandonò questo approccio nel giro di un anno, ma non diede comunque ascolto alle preghiere del padre. Iniziò a lavorare seriamente per vedere che cosa succedesse assumendo la non validità del quinto postulato. I quaderni dei suoi appunti ci mostrano che aveva iniziato a sviluppare quella che oggi conosciamo come «geometria iperbolica». Nel 1823, scrisse a suo padre che stava creando «dal nulla un nuovo mondo».

Dopo un certo iniziale scetticismo, Farkas si convinse del valore del lavoro svolto da suo figlio. Spinse quindi János a scrivere i suoi risultati come un'appendice alla propria opera magna, il *Tentamen,* una propedeutica rigorosa e sistematica di geometria, analisi, aritmetica e algebra che venne pubblicata nel 1831.[17] Farkas ne inviò una copia a Gauss, che dopo aver letto l'appendice scrisse al suo amico Gerling: «Considero questo giovane geometra Bolyai come un genio di prim'ordine». Al padre di János scrisse:

> Ora, qualche parola su tuo figlio. Se inizio col dire che non posso lodare il suo lavoro, ciò sul subito ti lascerà stupito, ma non posso fare altrimenti. Lodare il suo lavoro, infatti, significherebbe lodare me stesso. L'intero contenuto del suo saggio, il percorso seguito da tuo figlio e i risultati da lui raggiunti, coincidono con le scoperte che ho fatto io stesso, alcune delle quali risalgono a 30-35 anni fa. Sono sbalordito. Per quanto riguarda il mio lavoro, di cui fino a oggi non ho messo molto per iscritto, le mie intenzioni erano di non pubblicarlo finché fossi rimasto in vita. La maggior parte delle persone non hanno idee chiare sulle questioni di cui stiamo parlando, e ho trovato ben pochi uomini che sarebbero particolarmente interessati a ciò che ho da dire su questo argomento. Per coltivare un tale interesse, occorre dapprima aver riflettuto attentamente sulla vera natura di ciò che si vuole raggiungere, e su questo quasi tutti nutrono una profonda incertezza. D'altro lato, avevo intenzione di scrivere tutte queste cose più avanti, in modo che non andassero perdute con la mia morte. E quindi una piacevole

> sorpresa, per me, vedere che qualcuno mi ha risparmiato questo grattacapo, e sono particolarmente felice che sia il figlio di un mio vecchio amico a togliermi il diritto di precedenza su queste scoperte.[18]

Farkas fu felice della risposta, ma János ne rimase sconvolto. La sua salute mentale incominciò a mostrare segni di cedimento. Divenne irritabile e instabile, e nel 1833 venne messo a riposo. Come se ciò non fosse abbastanza, emerse che Bolyai non era stato neppure il primo a pubblicare. Anche Lobačevskij aveva iniziato a lavorare sul quinto postulato nei primi anni Venti dell'Ottocento, e aveva compreso che la geometria che si ottiene negando il quinto postulato sembra essere perfettamente sensata.

Le idee di Lobačevskij erano radicate nella sua opposizione all'idealismo trascendentale di Kant, secondo il quale lo spazio e il tempo sono le forme pure a priori attraverso le quali la mente impone l'ordine all'esperienza sensibile. Per Lobačevskij, invece, il concetto di spazio non era conosciuto a priori, bensì era qualcosa che la mente umana ricavava a posteriori dall'esperienza esterna. Egli annunciò i propri risultati nel 1826 e diede alle stampe la sua teoria della geometria non-euclidea nel 1829. Inizialmente aveva presentato l'articolo per la pubblicazione all'Accademia delle scienze di San Pietroburgo, la cui rivista aveva un numero di lettori relativamente ampio. Tuttavia il principale matematico russo di quei tempi, Michail Vasil'evič Ostrogradskij, famoso anche in Europa occidentale, respinse il suo contributo. Pertanto, Lobačevskij lo pubblicò in russo su una rivista generica locale e, dal 1835 al 1839, sempre in russo, negli atti accademici dell'Università di Kazan. Non c'è quindi da meravigliarsi che il suo lavoro fosse passato del tutto inosservato e che nulla cambiò, almeno in un primo momento.

Lobačevskij continuò a dedicarsi all'amministrazione universitaria, trovando comunque il tempo per coltivare la matematica. Il suo talento gestionale era largamente apprezzato. Aveva fatto uscire l'Università statale di Kazan da numerose crisi: ricostruendo il corpo docente dopo il 1826, salvando molte vite durante l'epidemia di colera nel 1830, restaurando gli edifici universitari dopo un devastante incendio nel 1842. I suoi sforzi nel campo della divulgazione scientifica e della modernizzazione delle scuole primarie e secondarie della regione furono notevoli e lodevoli. Nel 1832, Lobačevskij aveva sposato una donna (di famiglia abbiente) molto più giovane di lui, dalla quale ebbe sette figli. Le difficoltà economiche, i problemi di salute, la progressiva cecità e la morte del suo primo figlio guastarono gli ultimi anni della sua vita.

Purtroppo l'opera matematica di Lobačevskij non venne adeguatamente riconosciuta durante la sua vita. Ciononostante, egli continuò a pubblicare. Nel 1837 diede alle stampe un riassunto in francese dei suoi lavori sulla più importante rivista di settore dell'epoca, e — nel 1840 — un libro in tedesco sulla teoria delle parallele. Quest'ultimo colpì profondamente Gauss, che in seguito si prodigò per far entrare Lobačevskij nell'Accademia delle scienze di Gottinga e imparò il russo al solo fine di leggere il resto delle sue opere. Però, com'era sua abitudine, purtroppo non rilasciò dichiarazioni pubbliche di approvazione per questi lavori. Lobačevskij morì povero, cieco e col cuore spezzato il 24 febbraio 1856.

Farkas Bolyai si ritirò dall'insegnamento nel 1851 e morì, dopo una serie di colpi apoplettici, il 20 novembre 1856. La sua prima moglie era morta nel 1821, mentre la seconda gli sopravvisse. Il suo testamento riassume con parole toccanti la sua vita dopo il ritorno dalla Germania:

> Prima di tornare dalla Germania, le mattine portavano con sé la speranza di giornate splendide, che dopo alcuni giorni di fuoco e di gelo si trasformarono però poi in una continua successione di giornate di pioggia da un cielo perennemente coperto, fino a questa recente nevicata.[19]

Nel 1833, János Bolyai si ritirò nella tenuta di famiglia che aveva ereditato dalla nonna paterna. Iniziò a convivere con una donna di cui Farkas non aveva affatto una buona opinione, e i rapporti tra lui e suo padre si deteriorarono. Continuò a dedicarsi alle scienze, ma rimanendo molto lontano dalla matematica ufficiale. Gauss segnalò a Farkas l'opera di Lobačevskij, cosa che probabilmente spiegherebbe la circostanza in cui János, nel 1846, apprese dell'articolo pubblicato dal matematico russo nel 1829. János lo studiò attentamente, prendendo appunti e annotando i suoi tormentati pensieri. La sua ammirazione per i ragionamenti di Lobačevskij era accompagnata dall'oscuro

sospetto che questo studioso non esistesse neppure e che fosse tutta una trovata elaborata da Gauss per sottrargli il credito del suo lavoro. János sposò la sua compagna nel 1849 — dopo la Dichiarazione d'indipendenza dell'Ungheria —, la lasciò nel 1852, e abbandonò lo studio della matematica per lavorare a una teoria generale della conoscenza. Morì di polmonite il 27 gennaio 1860, all'età di cinquantasette anni. Dopo l'appendice al libro di suo padre non aveva più pubblicato nulla, ma lasciò comunque più di 20.000 pagine di manoscritti (oggi conservati nella biblioteca Bolyai-Teleki della città rumena di Tirgu-Mures).

Ancora nel 1850, erano in pochi ad ammettere che potessero esserci delle geometrie nelle quali il quinto postulato non valesse. Se Gauss avesse dichiarato apertamente il suo pensiero, le cose sarebbero state diverse, ma gli ultimi anni della vita di Gauss furono segnati da un ulteriore allontanamento dal mondo scientifico. Morì a Gottinga nel 1855 senza aver pubblicato nulla su quella spinosa questione.

Col tempo, i risultati di Gauss, Bolyai e Lobačevskij sarebbero entrati a far parte della matematica ufficiale. La pubblicazione postuma delle lettere e degli appunti scientifici di Gauss rese chiaro che era stato lui a scoprire per primo la geometria non-euclidea e accelerò l'accettazione dell'opera di Bolyai e di Lobačevskij. La priorità della scoperta da parte di Gauss condusse ad alcune congetture infondate — e oggi interamente screditate — secondo le quali sia Bolyai sia Lobačevskij sarebbero stati sottilmente influenzati dallo stesso Gauss: Bolyai attraverso suo padre Farkas, e Lobačevskij attraverso Bartels. Tom Lehrer — un matematico e cantautore che scrisse una serie di canzoni molto umoristiche e pungentemente satiriche all'epoca delle proteste contro la guerra del Vietnam — riprese questi deboli indizi di plagio in una canzone meravigliosamente divertente (per quanto ingiusta), che cantava simulando un pesante accento russo:

Chi ha fatto di me il genio che sono oggi,
il matematico che tutti gli altri citano,
chi è il professore che mi ha reso tale?
Il più grand'uomo che si sia mai sporcato di gesso.

A un solo uomo va riconosciuto il merito,
a un solo uomo va riconosciuta la colpa,
e il suo nome è Nikolaj Ivanovič Lobačevskij.
Ciao!
Nikolaj Ivanovic Lobač...

Mai dimenticherò il giorno in cui incontrai per la prima volta
il grande Lobačevskij.
In una sola parola mi insegnò il segreto del successo
in matematica:
plagiare!

Plagia,
non lasciare che il lavoro degli altri sfugga al tuo sguardo,
ricordati perché il buon Dio ti ha dato gli occhi,
e non tenerli quindi coperti,
ma plagia, plagia, plagia...
Solo, per favore, assicurati sempre di chiamarla «ricerca».

E da quando ho incontrato quest'uomo
la mia vita non è più stata la stessa,
e il suo nome è Nikolaj Ivanovič Lobačevskij.
Ciao!
Nikolaj Ivanovič Lobač...

L'eredità di Euclide

Gli infruttuosi sforzi di dimostrare il quinto postulato condotti nel XVIII secolo avevano portato a una chiara comprensione delle molte affermazioni che gli erano di fatto equivalenti. Fra queste affermazioni possiamo ricordare le seguenti:

1. Data una qualsiasi retta *r* e un punto P non appartenente alla retta stessa, è possibile tracciare una e una sola retta parallela a *r* passante per P.
2. La somma degli angoli interni di un triangolo è pari a 180 gradi (ossia, a due angoli retti).
3. Il rapporto fra la circonferenza di un cerchio e il suo diametro è lo stesso per tutti i cerchi, indipendentemente dalla loro grandezza.
4. Dato un qualsiasi triangolo, se ne può costruire un altro simile (ossia, con gli angoli corrispondenti uguali e il medesimo rapporto fra le lunghezze dei lati corrispondenti) di qualunque grandezza.
5. Il teorema di Pitagora.

Se accettiamo i primi quattro postulati e una qualsiasi di queste affermazioni, potremo derivare il quinto postulato (e le altre affermazioni equivalenti). Se accettiamo il quinto postulato, ne seguiranno tutte le affermazioni indicate sopra. Le ricerche di Gauss, Bolyai e Lobačevskij hanno mostrato che possono esistere delle geometrie in cui esso (e con lui tutte le affermazioni equivalenti) non vale. Ciò giustifica il fatto che Euclide io abbia considerato alla stregua di un assioma: esso, infatti, non può essere dimostrato partendo solo dai primi quattro postulati. Per ottenere la comune geometria piana nota fin dai tempi dei babilonesi, dobbiamo assumere (ossia, accettare senza prova) la verità del quinto postulato, o di un qualche altro enunciato altrettanto complicato.

Tuttavia, la vera natura dei postulati di Euclide, e del quinto in particolare, non sarebbe stata compresa per diversi altri decenni pur accettando il *fatto* che non era possibile dedurre il quinto postulato dagli altri e che potevano esistere anche altre geometrie in cui il quinto postulato non valeva. Queste geometrie alternative, però, non erano solo curiosità logiche, anomalie che nascevano dalla strana incapacità dei primi quattro assiomi di catturare adeguatamente la realtà. Queste altre geometrie avevano in tutto e per tutto lo stesso grado di realtà e lo stesso valore della familiare geometria piana. Tutto ciò diventava chiaro se si guardavano le cose nel modo «giusto», ma questa corretta prospettiva era molto più ampia, molto più vasta e del tutto diversa dal modo in cui tutti, prima del 1850, guardavano la geometria. Quel radicale cambiamento di vedute che avrebbe chiarito ogni cosa segnando l'inizio della nostra concezione contemporanea dello spazio venne esposto nel 1854 nella lezione di abilitazione di un timido ma brillante allievo di Gauss, Bernhard Riemann. Questa lezione fu uno dei più grandi momenti della storia della scienza, ed è di vitale importanza per la nostra comprensione dell'opera di Poincaré e di tutta la geometria e la topologia moderne.

7
La lezione di abilitazione di Bernhard Riemann

Le persone che si affollarono nell'auditorium del Mit nell'aprile 2003 per ascoltare Grigori Perelman sapevano di avere un posto in prima fila per assistere a una rivoluzione intellettuale. Non così coloro che si raccolsero nell'aula magna dell'Università di Gottinga il 10 giugno 1854 per ascoltare la dissertazione di Bernhard Riemann *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen* (Sulle ipotesi che stanno alla base della geometria). Il motivo per cui erano lì era la lezione di abilitazione di Riemann, quella lezione formale che costituiva l'ultima prova del lungo processo, ereditato dal Medioevo, attraverso il quale un candidato si qualificava per insegnare all'università. Per Riemann non fu affatto facile formulare a parole i suoi pensieri, e nei sei mesi precedenti dovette lavorare duro per preparare il suo intervento. Si era impegnato per far sì che sembrasse comprensibile a tutti i convenuti, ma il suo vero pubblico era costituito da una sola persona: Carl Friedrich Gauss, il suo supervisore. Pochi fra gli individui presenti compresero il significato o l'audacia delle sue parole, ma Gauss sì.

Nel suo discorso, Riemann riformulò completamente 3000 anni di geometria, e lo fece parlando in un semplice tedesco, senza quasi ricorrere a nessuna notazione matematica. La sua tesi non sarebbe stata pubblicata fin dopo la sua morte, solo un decennio più tardi, e ci sarebbero comunque voluti altri dieci o vent'anni perché si facesse strada nella matematica ufficiale. Essa avrebbe dato origine alla geometria differenziale come la conosciamo oggi. Senza di essa, non ci sarebbe stata la relatività generale, e gran parte dell'opera di Poincaré (così come la totalità di quella di Perelman) sarebbe stata semplicemente inconcepibile. Al termine della prova, un Gauss insolitamente agitato confidò a un suo collega che la lezione aveva superato tutte le sue aspettative. Egli sapeva di aver appena assistito a un momento storico senza precedenti. Quando ormai gli rimaneva soltanto un anno da vivere, Gauss aveva avuto il privilegio di poter dare un'occhiata al futuro.

Oggi, in parte grazie al Clay Institute e a diversi recenti libri, il nome di Riemann è diventato più noto al grande pubblico.[1] Anche se la sua tesi di abilitazione può essere considerata come uno dei grandi esempi storici di un evento scientifico che non venne adeguatamente riconosciuto dai contemporanei, l'opera di Riemann sarebbe poi diventata oggetto di venerazione da parte dei matematici. Ciò che la rende particolarmente straordinaria è il fatto che gli scritti del suo scopritore ammontano in tutto a meno di 600 pagine, a malapena la lunghezza di un buon romanzo ottocentesco. *Guerra e pace di* Tolstoj è lungo più del doppio. Il talento di Riemann fiorì relativamente tardi ed egli non arrivò neppure a vedere il proprio quarantesimo compleanno, ma fu in grado di rivoluzionare tutto ciò di cui si occupò.

L'epoca di Riemann

Nato nel 1826, Riemann era uno dei sei figli di un povero pastore protestante. La tubercolosi era radicata nella sua famiglia, e Bernhard non godette mai di una buona salute. Sua madre morì quando lui aveva *sette* anni e lui e i fratelli vennero allevati dal padre. Il fratello di Bernhard morì poco prima di lui e tre delle sue sorelle morirono anche più giovani. Riemann era un ragazzo studioso, devoto e riservato. A causa della sua timidezza, non si sentiva mai realmente a proprio agio al di fuori della sua famiglia e far lezione era per lui un tormento. Come si spiega che il figlio di un religioso indigente, avviato allo studio della teologia, si sia ritrovato un pomeriggio a tenere

una lezione davanti a un gruppo che includeva Gauss, il più famoso matematico del mondo, su un argomento talmente esplosivo che nemmeno lo stesso Gauss avrebbe mai avuto il coraggio di parlarne? Come Riemann certamente sapeva, fra il pubblico c'era anche un professore di filosofia innamorato di Kant che avrebbe probabilmente criticato con severità qualunque affermazione che avesse messo in questione il primato di Euclide. Possiamo solo avanzare delle ipotesi su che cosa gli abbia potuto infondere il coraggio necessario (e, alla fine del prossimo capitolo, ci soffermeremo ancora a spendere qualche parola in proposito).

La formazione e il retroterra culturale di Riemann erano il risultato di una costellazione di forze sociali ed economiche che plasmano ancora oggi la nostra matematica e la nostra scienza, e che è per noi importante comprendere. Fino all'età di quattordici anni, Riemann ricevette lezioni private da suo padre nel villaggio di Quickborn, nello Stato tedesco di Hannover, dopodiché frequentò i ginnasi delle città vicine. Nel 1846 andò a studiare teologia presso l'Università di Gottinga.

La Germania di quegli anni era una pentola a pressione pronta a esplodere. In seguito alla sconfitta di Napoleone, il Congresso di Vienna (1814-15) era riuscito a riportare l'Europa a quell'equilibrio di forze che era stato raggiunto prima del tumulto della Rivoluzione francese. Venne costituita una Federazione tedesca (ben poco unitaria) composta da 35 Stati sovrani e quattro città indipendenti con gli obiettivi condivisi di rafforzare la posizione dei reggenti, di mantenere i privilegi per l'aristocrazia e la chiesa e di schiacciare le fastidiose idee dell'Illuminismo. Le riforme liberali introdotte da Napoleone furono cancellate, venne imposta la censura e la libertà di stampa fu soppressa.

Il baco, però, era ormai penetrato in profondità nella mela reazionaria. L'ordine fondato sulla repressione era instabile, e la tensione andò accumulandosi per trent'anni. La maggior parte della popolazione viveva ancora in aree rurali, ma ben pochi contadini possedevano la terra che coltivavano. Sempre più persone si trasferivano nelle città e nelle aree urbanizzate. Le sporadiche rivolte per i salari, per le condizioni di vita e per la ridottissima libertà sociale venivano soffocate rapidamente e spesso brutalmente, causando cosi ulteriore malcontento. Anche la sonnolenta Gottinga non rimase estranea a queste agitazioni. Fatti salvi gli anni napoleonici, durante i quali fece parte del regno fantoccio di Vestfalia, lo Stato di Hannover era stato governato da monarchi inglesi. Ma, nel 1837, l'ascesa al trono della regina Vittoria condusse a un inevitabile cambiamento. La legge hannoveriana non riconosceva la legittimità dei sovrani di sesso femminile, pertanto il ducato di Hannover passò nelle mani dello zio ultraconservatore della giovane sovrana, il duca di Cumberland, che revocò subito la costituzione relativamente liberale dello Stato tedesco. Sette eminenti professori di Gottinga che avevano sottoscritto una lettera di protesta vennero sbrigativamente licenziati, cosa che causò una violenta reazione di rabbia che si diffuse ben presto anche al di là dei confini di Hannover (in questo periodo del XIX secolo, gran parte della Germania era ormai attraversata da una rete ferroviaria) e, nel contempo, contribuì a forgiare fra i tedeschi una nascente consapevolezza della loro condivisione di una lingua e una tradizione comuni. Da un capo all'altro della Germania, le organizzazioni studentesche fecero proprio il motto di *«Ehre, Freiheit, Vaterland* (Onore, libertà, patria).

L'accoppiamento della rivendicazione delle libertà civili con il sentimento nazionalista era qualcosa di nuovo e di esplosivo. Le carestie del 1847 generarono ulteriore malcontento. Nel marzo 1848, la deposizione del re di Francia e la conseguente dichiarazione della Seconda Repubblica furono la miccia che innescò lo scoppio della rivoluzione in Germania. Imponenti dimostrazioni in diversi Stati tedeschi portarono all'adozione di costituzioni che assicuravano le libertà civili e l'introduzione di organi di governo democraticamente eletti. Anche i due Stati più potenti, l'Austria e la Prussia, ne furono profondamente toccati.

Questo fu lo sfondo storico degli anni più cruciali della formazione di Riemann. Poco dopo il suo arrivo a Gottinga, nel 1846, egli iniziò a seguire numerosi insegnamenti di matematica e scrisse a suo padre chiedendogli se sarebbe potuto passare a quest'ultima dalla facoltà di teologia. Una volta ottenuto il permesso paterno, Riemann trascorse gli anni accademici 1847-49 a Berlino, cosa che lo catapultò nel bel mezzo della rivoluzione. Lo mise però anche al centro del più eccitante palcoscenico matematico del mondo. A Berlino, infatti, i famosi professori Jakob Steiner, Carl

Jacobi, Gustav Lejeune Dirichlet e Gotthold Eisenstein stavano attirando studenti da tutta Europa. Il calcolo infinitesimale era stato applicato a nuovi sistemi numerici, con straordinari risultati. Sembrava che ogni giorno venissero scoperte nuove funzioni dalle sorprendenti proprietà. Le conquiste matematiche, combinate con le agitazioni sociali e politiche di quegli anni, crearono un ambiente ricco, stimolante e totalmente disordinato. Lì Riemann imparò alla perfezione l'analisi complessa e incontrò una grande quantità di nuove idee matematiche. Era in grande sintonia con Dirichlet (che aveva studiato in Francia), il cui approccio intellettuale ai problemi gli piaceva moltissimo.

Dopo diversi mesi inebrianti, la rivoluzione entrò in stallo. Nell'autunno del 1848, gli aristocratici prussiani avevano ormai ripreso il controllo di Berlino e l'esercito marciava per le strade. La rivoluzione era fallita. Si ristabilì la repressione e centinaia di migliaia di cittadini emigrarono negli Stati Uniti, unendosi all'esodo dall'Irlanda (allora in preda a una carestia). Il fallimento dei quarantottini — come vennero chiamati i rivoluzionari — e il mancato appuntamento con l'unificazione democratica avrebbero avuto devastanti conseguenze nel XX secolo.

L'emergere dell'università di ricerca tedesca

Ma le stesse circostanze che diedero origine alla rivoluzione ebbero anche un ruolo chiave nell'emergere di una delle glorie del XIX secolo: l'università di ricerca tedesca, la più efficace istituzione per la creazione e la trasmissione del sapere che fosse mai apparsa sulla faccia della Terra. Coltivando l'eccellenza e offrendo i luoghi dove gli individui dotati come Riemann potevano fiorire, le università di ricerca garantirono alla Germania, fra la fine del XIX e l'inizio del XX secolo, l'acquisizione del primato mondiale nel campo della scienza e della matematica.

Oggi noi diamo per scontato il ruolo delle università nella creazione del sapere, ma 150 anni fa tale funzione non era affatto chiara. Durante il XVIII secolo, la scienza e la matematica venivano insegnate principalmente nelle accademie nazionali o regionali, sostenute dalla nobiltà locale. E, nella maggior parte delle regioni d'Europa, questo sostegno era minimo. In Gran Bretagna, per esempio, i finanziamenti reali alla Royal Society erano praticamente inesistenti e la matematica era in gran parte appannaggio di amatori di talento, molti dei quali occupavano cattedre per le quali la ricerca non faceva parte delle mansioni di lavoro. I finanziamenti reali all'Accademia prussiana erano molto più nutriti, e questa si trovava al centro della scienza e della matematica nella Germania del XVIII secolo, sebbene le materie scientifiche venivano in parte coltivate anche nelle università (soprattutto in quelle più giovani, come Gottinga). In Francia, le accademie di ricerca erano concentrate a Parigi[2] ed erano relativamente ben finanziate. La Rivoluzione fu una manna per la ricerca francese: la teologia perse il proprio primato e la matematica, tra tutte le scienze, divenne la regina. Agli inizi del XIX secolo, Parigi era il centro intellettuale del mondo. Tuttavia, in Francia le università erano associate all'insegnamento (più che all'approfondimento) in misura ancor maggiore di quanto avveniva negli altri Paesi, ed erano più sbilanciate verso le materie umanistiche e la retorica.

All'inizio dell'Ottocento nessuna persona di buon senso avrebbe predetto che Berlino — o qualsiasi altra città tedesca — sarebbe stata ben presto rivale di Parigi come centro scientifico o matematico. La Germania era rimasta indietro rispetto alla Gran Bretagna, alla Francia e alla Spagna quasi sotto ogni aspetto. Era in ritardo nel processo di unificazione, in quello di industrializzazione, in quello di urbanizzazione. Nel 1806, la vittoria di Napoleone contro la Prussia a Jena sembrò indicare che il nuovo secolo sarebbe appartenuto alla Francia. Il Congresso di Vienna sancì di fatto la frammentazione tedesca, assicurandosi che gli Stati della debole federazione non si sarebbero uniti e che la Germania sarebbe rimasta nelle sue condizioni sociali ed economiche primitive.

Paradossalmente, tuttavia, la disunione e la competizione fra i piccoli Stati, assieme alla relativa arretratezza dell'economia tedesca, crearono gli incentivi per l'emergere dei singoli atenei. I prìncipi locali avevano nelle loro università un motivo di orgoglio e le sostenevano il più possibile.

Le cattedre di professore ordinario non erano molto numerose e per le nomine c'erano lunghe liste di raccomandazione da parte di altri ordinari. Le città gareggiavano per avere i professori migliori e più dotati, rendendo più probabile che costoro venissero scelti in base al loro effettivo merito. La pratica di assumere i professori più abili da altri istituti offriva poi ai docenti stessi l'opportunità di rinegoziare i loro contratti e faceva sì che la loro parola avesse un certo peso al momento di trattare le condizioni del loro incarico. E proprio in virtù di questa consuetudine Gauss fu nella posizione di farsi costruire un osservatorio a Gottinga. Inoltre, le strutture sociali rendevano le carriere accademiche un mezzo accessibile di avanzamento per i giovani tedeschi. E dato che questi percorsi erano desiderabili e competitivi, i professori che stavano conducendo ricerche d'avanguardia avevano maggiori probabilità di attrarre gli studenti migliori. Ciò aggiungeva lustro all'ateneo, cosa che a sua volta permetteva all'istituzione di attirare professori ancor più di talento, e così via.

Come ci insegna l'esperienza tedesca del XIX secolo, l'abbinamento fra gioventù ed esperienza, e fra ricerca e insegnamento, fa delle università le sedi naturali ed elettrizzanti della ricerca scientifica. Il filosofo e matematico Alfred North Whitehead colse esattamente questo punto quando scrisse:

> La ragion d'essere dell'università è quella di preservare il legame tra la conoscenza e il gusto della vita, unendo gioventù e maturità in una visione immaginativa dell'apprendimento [...] La tragedia di questo mondo è che coloro che possiedono l'immaginazione hanno ancora poca esperienza, e coloro che hanno una grande esperienza hanno ormai un'immaginazione infiacchita. Agire basandosi sulla sola immaginazione senza conoscenza è da sciocchi, e agire basandosi sulla sola conoscenza senza immaginazione è da pedanti. La missione dell'università è quella di unire assieme l'immaginazione e l'esperienza.[3]

Non è un caso che siano spesso i giovani a portare i contributi più decisivi nel campo della matematica e delle scienze. In questi ambiti del sapere, infatti, il progresso viene spesso raggiunto mettendo in discussione le conoscenze ricevute anziché costruendo su di esse. Mentre in Germania era possibile essere nominati professori ordinari a un'età relativamente bassa, in Francia le posizioni di maggior prestigio erano negli istituti nazionali, come l'Accademia delle scienze o il Collegio di Francia. La Rivoluzione francese aveva stimolato il progresso scientifico liberando molti incarichi in queste società e facendo così spazio agli aspiranti più giovani. Tuttavia, le nomine erano vitalizie e, con l'avanzare del XIX secolo, coloro che entravano a far parte di questi istituti vi giungevano spesso solo dopo aver trascorso gli anni più proficui della loro carriera di scienziati sgobbando su incarichi che lasciavano poco tempo per la ricerca.

Naturalmente, la competizione fra le diverse realtà (e i monarchi che le sostenevano) non basta da sola a spiegare esaustivamente l'emergere dell'università di ricerca. Anche la vittoria dei francesi sotto Napoleone, nel 1806, vi contribuì in modo indiretto. Essa spinse infatti gli Stati tedeschi a fare una seria analisi della situazione in cui versavano e aprì la strada perché numerosi individui di talento esterni al sistema universitario potessero giocare un ruolo attivo nel migliorarne la qualità. Due di questi ricercatori furono i fratelli von Humboldt. Wilhelm (1767-1835) divenne ministro dell'Istruzione in Prussia nel 1809 e supervisionò lo sviluppo di un sistema educativo mirato a una scolarizzazione rigorosa a tutte le classi sociali. Alexander (1769-1859), uno spirito eclettico, spese la propria cospicua eredità in un viaggio di esplorazione in Amazzonia durato diversi anni. Aveva studiato da geologo, e lavorò per anni a un imponente volume in cui descriveva dettagliatamente le proprie rilevazioni. Era in regolare corrispondenza con molti dei più grandi scienziati dell'epoca. Mentre si trovava negli Stati Uniti, andò a far visita a Thomas Jefferson, allora al suo secondo mandato presidenziale.

I fratelli von Humboldt amavano la vita intellettuale di Parigi ed erano determinati a creare un clima simile anche a Berlino. L'Università di Berlino, che aveva aperto i battenti nel 1810, puntava esplicitamente a diventare la migliore del mondo. Alexander apprezzava in particolare la matematica e contribuì a fornire sostegno morale ed economico ad alcuni dei giovani matematici tedeschi. L'ateneo berlinese aveva fatto un tentativo molto serio di accaparrarsi Gauss da Gottinga negli anni Venti dell'Ottocento, ma Gottinga contrastò l'offerta e riuscì a trattenerlo. Ciononostante, dagli anni Trenta Berlino disponeva di un dipartimento di matematica pieno di vitalità. Alexander

fece pesanti pressioni per portarvi Lejeune Dirichlet. Fu una nomina controversa ma ben pensata: Dirichlet era un personaggio dal notevole peso intellettuale e avrebbe influenzato in particolar modo Riemann.
Un altro individuo esterno al sistema universitario che contribuì sostanzialmente all'affermazione della matematica tedesca fu il funzionario pubblico prussiano August Crelle. Ingegnere civile, era innamorato della matematica e fondò la più importante rivista dedicata nel mondo di quel periodo: «Journal für die reine und angewandte Mathematik».[4] Nonostante il titolo, questa pubblicazione — che esiste tuttora — era dedicata quasi esclusivamente alla matematica pura. Ieri come oggi, è familiarmente nota come la «Rivista di Creile». Creile aveva un occhio quasi infallibile nell'individuare il talento matematico, e pubblicò molte opere oggi famose di giovani ricercatori allora sconosciuti. Come Alexander von Humboldt, anche Creile conosceva personalmente molti di loro e li incoraggiò e aiutò.

Verso la metà del XIX secolo, le università tedesche non avevano rivali per la qualità e la profondità della loro matematica e della loro scienza. Come le università medioevali che le avevano precedute, questi centri di ricerca sorsero spontaneamente in un ambiente particolarmente fertile. Essi sono le istituzioni sulle quali sono modellate le grandi università di oggi, e sono state un fattore chiave in quell'esplosione della matematica e della scienza che ha caratterizzato la nostra epoca. La libertà che lasciavano a studenti e professori produceva l'eccellenza ed era particolarmente adatta per gli individui maggiormente in grado di autogestirsi, come Riemann. Quando ritornò da Berlino, nel 1849, quest'ultimo intraprese lo studio della fisica e della filosofia e terminò il suo dottorato nel 1851 sotto la supervisione di Gauss. La sua dissertazione, cui abbiamo già accennato, fu assolutamente straordinaria. Riemann usò un principio che attribuì a Dirichlet per fare enormi passi avanti in un nuovo campo della matematica: l'analisi complessa. Questo campo nasceva dall'applicazione dei metodi del calcolo infinitesimale ai «numeri complessi», numeri ottenuti sommando i numeri reali con le radici quadrate di numeri negativi.[5] Commentando la tesi di Riemann, Gauss elogiò la sua originalità; egli, inoltre, insistette perché dopo la sua dissertazione Riemann si fermasse a Gottinga.

L'abilitazione

In Germania, così come in altri Paesi, il percorso della carriera accademica era ancora lo stesso che vigeva nell'Università di Parigi in epoca medioevale. Lo studente faceva per prima cosa un dottorato, che gli (le donne erano pochissime: le convenzioni sociali e i pregiudizi rendevano molto difficile per loro intraprendere la carriera universitaria) dava il diritto di fornire assistenza al docente durante i corsi. Quindi, proseguiva il suo lavoro di ricerca, presentava i suoi risultati in forma scritta (come *Habilitationsschrift,* o tesi di abilitazione) e teneva una lezione pubblica inaugurale (la lezione di abilitazione). Sia il lavoro scritto sia la lezione venivano giudicati da un comitato di professori. Una volta che il candidato aveva ottenuto l'abilitazione, poteva essere assunto dall'università come *professor extraordinarius,* un incarico che assomiglia a quello degli odierni ricercatori universitari. La paga era minima. Il professore straordinario fresco di nomina aveva il diritto di tenere dei corsi e riceveva una percentuale delle tasse versate dagli studenti per seguirli. Se i suoi corsi riuscivano ad attrarre un buon numero di studenti, il guadagno era sufficiente per tirare avanti. La sicurezza e un reddito decente arrivavano però solo con la nomina a uno dei rari posti di professore ordinario *(professor ordinarius),* per i quali il salario era garantito e pagato dallo Stato.

Per la sua lezione inaugurale, Riemann presentò alla commissione tre possibili argomenti. Relativamente al primo aveva svolto un lavoro rivoluzionario, il secondo si inoltrava in un'area di cui era esperto, e il terzo era *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen* (Sulle ipotesi che stanno alla base della geometria). Riemann non aveva mai prodotto nulla sulla geometria, anche se appare evidente che ci stava senz'altro pensando da tempo. L'ultima parola sulla scelta dell'argomento spettava al supervisore, ma, in pratica, questi sceglieva normalmente il tema col quale il candidato aveva maggiore familiarità. Richard Gauss, tuttavia, scelse il terzo,

l'argomento sul quale Riemann aveva lavorato di meno. Nel caso specifico, Dedekind, collega e amico di Riemann, scrisse che Gauss aveva infranto ogni tradizione e aveva scelto il terzo tema «perché era interessato a sapere come una persona così giovane avrebbe trattato un argomento tanto difficile».[6]

Non conosciamo la natura del rapporto fra Gauss e Riemann, e non possiamo quindi sapere quali fossero le effettive ragioni dietro la scelta di Gauss. Dato che i due vivevano nella stessa città, non ci sono lettere che possano documentare i loro scambi di idee. Questo vuoto è stato riempito da ogni sorta di congetture, incluse alcune secondo le quali Gauss non apprezzava pienamente l'abilità dell'allievo. Ciò è molto improbabile, essendoci prove scritte che Gauss espresse la propria ammirazione per la tesi di Riemann e che si impegnò per farlo rimanere a Gottinga. Riemann, dal canto suo, conosceva bene l'opera di Gauss e, ammesso e non concesso che i due non avessero mai parlato di geometria, il giovane potè senz'altro constatare l'interesse del suo supervisore per i fondamenti della geometria dall'opera di Gauss sulle superfici nel 3-spazio e dalle sue recensioni. Inoltre, Riemann era molto vicino al genero di Gauss, Wilhelm Weber, un fisico di talento. Weber, uno dei sette professori di Gottinga licenziati dal duca reazionario, era stato riassunto durante la rivoluzione del 1848. Gauss si fidava di Weber e lo aveva messo al corrente del proprio lavoro sul postulato delle parallele e sulla geometria non-euclidea.

Nel complesso, è impensabile che a Riemann non fosse venuto in mente che mettendo in elenco una lezione sui fondamenti della geometria avrebbe potuto offrire a Gauss una tentazione irresistibile. Ciò, tuttavia, non gli impedì poi di pentirsi di aver inserito la geometria come un possibile argomento. «Sono sempre più convinto che Gauss abbia lavorato su questo tema per anni, e che ne abbia parlato con alcuni amici (tra cui Weber)» scrisse Riemann a suo padre. A tutti noi capita a volte di fare il passo più lungo della gamba, pur sapendo che ci pentiremo delle probabili conseguenze. Gauss, dal canto suo, non sarebbe stato così ottuso da scegliere questo argomento se non avesse pensato che Riemann avrebbe avuto qualcosa di interessante da dire.

In ogni caso, dobbiamo ringraziare il professore per aver compiuto questa scelta. Nella sua lezione, chiaramente rivolta in particolare all'attenzione di Gauss, Riemann partì dai risultati del suo grande maestro e, quindi, li rivoltò completamente.

Che cosa disse Riemann

Per prima cosa, Riemann distinse la nozione di spazio da quella di una «geometria», che è una struttura addizionale su uno spazio. Egli definì uno spazio come un insieme di punti, e una varietà come un particolare tipo di spazio che consiste di regioni in cui i punti possono essere indicati attraverso collezioni di numeri.

La varietà più semplice, spesso indicata con il simbolo **R**, è la retta numerica. In altri termini, possiamo immaginare geometricamente i numeri reali pensandoli come corrispondenti a punti su una retta. Per far questo, tracciamo una retta che immaginiamo estendersi all'infinito in entrambe le direzioni. Scegliamo quindi un punto a cui assegniamo il numero 0, stabiliamo un'unità di lunghezza (per esempio, un centimetro, un pollice, un braccio, un anno luce ecc.) e fissiamo una direzione rispetto allo 0 (ce ne sono soltanto due) che rappresenti la direzione positiva. A ogni numero reale positivo, associamo dunque il punto che si trova a questo stesso preciso numero di unità di lunghezza a partire dallo 0 sul lato positivo. A ogni numero reale negativo, quindi, associamo il punto che si trova esattamente ad altrettante unità di lunghezza a partire dallo 0 sul lato negativo.[7]

La varietà immediatamente successiva in ordine di semplicità è il piano ($\mathbf{R}^2$), che possiamo pensare come corrispondente a coppie di numeri reali. Per far questo, immaginiamo che la pagina di questo libro si estenda all'infinito in alto, in basso, a destra e a sinistra. Scegliamo due rette numeriche distinte che si intersecano nel punto che su ciascuna di esse corrisponde allo 0. Normalmente, ciò viene disegnato rappresentando la prima retta numerica come orizzontale, con la direzione positiva rivolta verso destra, e la seconda come verticale, con la direzione positiva rivolta verso l'alto. Si tratta però soltanto di una convenzione, e potremmo scegliere di orientare le rette in

altri modi. L'importante, comunque, è che una volta che abbiamo scelto queste rette, associamo ogni coppia di numeri a un punto sul piano vedendo il primo numero della coppia come la distanza parallela alla prima retta numerica (con il segno del numero che indica la direzione), e il secondo numero della coppia come la distanza parallela alla seconda retta.[8]

Il 3-spazio ($\mathbf{R}^3$) è l'insieme i cui punti sono triple di numeri reali (dove, come con $\mathbf{R}^2$, l'ordine è importante). Per rappresentarlo geometricamente, tracciamo dapprima tre rette numeriche che si intersecano tutte nel punto che su ciascuna di esse corrisponde allo 0 e che siano tali da non appartenere tutte al medesimo piano. Questo disegno non può essere propriamente riportato su un foglio di carta (perché in tal caso le tre rette si troverebbero tutte, per l'appunto, sul foglio di carta), però possiamo disegnare due delle rette sul piano della carta, e immaginare che la terza esca direttamente dalla carta passando per l'intersezione delle due rette e sia perpendicolare a entrambe.[9] Pensiamo quindi la tripla (2, 3, -1), per esempio, come corrispondente al punto che si trova a due unità nella direzione positiva lungo la prima retta numerica, a tre unità nella direzione positiva lungo la seconda retta numerica, e a una unità nella direzione negativa lungo la terza retta numerica.[10] La tripla (2,5, -1, 3) corrisponde invece al punto a 2,5 unità nella direzione positiva lungo la prima retta numerica, una unità nella direzione negativa lungo la seconda, e tre unità nella direzione positiva lungo la terza. Immaginiamo che il 3-spazio si estenda infinitamente in tutte le direzioni, con ogni tripla di numeri associata esattamente a un preciso punto.

Riemann non si fermò ai numeri, alle coppie di numeri e alle triple di numeri. Se n è un qualunque numero intero positivo, possiamo pensare all'insieme di tutte le n-ple ordinate di numeri reali come a uno spazio, chiamato «n-spazio» e indicato con $\mathbf{R}^n$. I suoi «punti» sono n-ple di numeri reali ed esso è n-dimensionale perché occorrono n numeri per specificare ogni punto. Nel 3-spazio non possiamo avere più di tre direzioni indipendenti perché, per esempio, se tracciamo un quarto asse nel 3-spazio, possiamo descrivere i punti lungo questo quarto asse nei termini delle triple che rappresentano la loro posizione rispetto ai primi tre assi. Anche se di fatto non possiamo disegnare una rappresentazione di un n-spazio con n maggiore di 3, in esso non c'è nulla di strano o di inimmaginabile. Se, poniamo, n è pari a 5, allora il 5-spazio è semplicemente l'insieme di tutte le 5-ple di numeri reali. Noi sappiamo che cosa sono i numeri reali, e una 5-pla è semplicemente una collezione ordinata di cinque di essi. Che cosa importa, quindi, se non possiamo rappresentarli visivamente in un grafico? Una varietà n-dimensionale è un insieme di punti in cui l'insieme di punti vicini a un qualunque punto dato assomiglia a (ossia, è omeomorfo a) una regione nell'n-spazio. Proprio come accade nei casi in cui n è uguale a 2 o a 3, per ogni n la più semplice varietà di dimensione n è l'n-spazio, al quale si aggiungono poi infinite altre varietà n-dimensionali. Riemann ammette anche «varietà infinito-dimensionali».

Euclide aveva costruito la sua geometria su un numero di termini per i quali aveva presentato delle descrizioni, ma che rimanevano sostanzialmente non definiti: punti, linee rette, piani. È vero che è possibile pensare un punto come un numero, i punti di una retta come un insieme di punti in corrispondenza biunivoca con i numeri reali, o un piano come un insieme di punti in corrispondenza biunivoca con coppie di numeri, ma per ottenere la teoria di Euclide occorre aggiungere ulteriori specificazioni. Riemann sostenne che la distanza era ancora più importante delle nozioni originarie di Euclide e che andava specificata in modo indipendente. Riemann era un maestro nell'analisi, e il modo da lui proposto per specificare la distanza in una varietà era interessante e fecondo come tutte le altre sue idee.[11] Egli osservò che una volta che abbiamo un modo per misurare la velocità lungo un qualsiasi cammino in una varietà, il calcolo infinitesimale ci offre automaticamente un modo per misurare le lunghezze delle curve nella varietà, e l'algebra (e la trigonometria) ci offre automaticamente un modo per misurare gli angoli.[12] Con il termine «metrica», intendiamo una regola per misurare la velocità lungo le curve o per misurare la distanza tra due punti. Stando a Riemann, le due cose si equivalgono.

Inoltre, definiamo linee rette quelle che tracciano la più breve distanza fra i loro punti. Queste linee sono chiamate «geodetiche». Una volta che abbiamo la nozione di linee rette, possiamo definire i triangoli come le figure che hanno per bordo tre segmenti geodetici. E una volta che abbiamo definito i triangoli, possiamo definire la «curvatura». In una varietà bidimensionale, la

curvatura in corrispondenza di un determinato punto è semplicemente un numero che misura la deviazione da 180 gradi della somma degli angoli di un triangolo che ha per vertice quel punto. Più precisamente, è la misura della deviazione da 180 gradi quando l'area del triangolo diventa estremamente piccola. Parlare di «curvatura positiva» significa che i triangoli hanno più di 180 gradi, di «curvatura negativa» che hanno meno di 180 gradi, e di curvatura nulla (o 0) che i triangoli hanno una somma angolare pari esattamente a 180 gradi.

In una varietà di dimensione superiore a due, abbiamo molti piani bidimensionali differenti che passano per un punto e possiamo avere differenti curvature per i triangoli geodetici che sono tangenti ai diversi piani che passano per quel punto. La curvatura non è più data da un singolo numero, ma da un'intera collezione di numeri, uno per ogni coppia di direzioni tracciabili per un punto. (Ogni coppia di direzioni determina un piano nello spazio delle direzioni, e questo a sua volta determina una superficie bidimensionale tracciata dalle geodetiche tangenti alle direzioni nel piano.) Lo strumento matematico per misurare le diverse curvature nelle differenti direzioni è chiamato il «tensore di curvatura di Riemann».

Nel suo piccolo libro sulla geometria differenziale delle superfici, Gauss aveva definito la curvatura per una superficie nel 3-spazio sfruttando il comportamento delle perpendicolari alla superficie. La sua definizione non avrebbe altrimenti avuto senso perché, per definire una perpendicolare a un punto di una superficie, essa deve trovarsi nel 3-spazio. Egli dedicò allora molte pagine di calcoli a mostrare che la curvatura potrebbe di fatto essere determinata da qualcuno che viva sulla superficie e che non possa abbandonarla per tracciare perpendicolari. Con una mossa audace, Riemann definì invece la curvatura in base a quella proprietà che Gauss si era impegnato duramente a dimostrare. Egli definì lo spazio come «piatto» se e solo se la somma degli angoli di ogni triangolo in esso costruito misura 180 gradi. In questo caso, la curvatura in ogni piano delle direzioni è nulla. Uno spazio, quindi, è piatto se e solo se in esso valgono i risultati elencati a p. 42. Ossia, se e solo se il teorema di Pitagora è valido; se e solo se vale il quinto postulato. Tre millenni di geometria riassunti in una definizione!

Per prendere un particolare esempio, noi abbiamo appena definito il 2-spazio $\mathbf{R}^2$ come l'insieme di coppie (x, y) di numeri reali. Esso diventa il 2-spazio euclideo se definiamo la distanza tramite il teorema di Pitagora. In questo caso, a volte ci serviamo anche di uno specifico simbolo, $\mathbf{E}^2$, per chiarire che ciò a cui ci riferiamo non è il 2-spazio in generale, ma il 2-spazio con questa particolare distanza. Analogamente, definiamo il 3-spazio euclideo ($\mathbf{E}^3$) come il 3-spazio con distanza definita dal teorema di Pitagora.[13] É quindi possibile mostrare che una curva in un 2-spazio o in un 3-spazio euclidei è una geodetica se e solo se è una linea retta nel senso usuale del termine. Inoltre, dato che la somma degli angoli di ogni triangolo in un 2-spazio e in un 3-spazio euclidei è uguale a 180 gradi, il 2-spazio e il 3-spazio euclidei risultano piatti. Ma non c'è motivo di fermarci alla seconda o alla terza dimensione. Definiamo quindi 1'*n*-spazio euclideo ($\mathbf{E}^n$) come 1'*n*-spazio (vale a dire, l'insieme di *n*-ple di numeri reali) con distanza definita da una generalizzazione del teorema di Pitagora.[14] Anche in questo caso, la somma degli angoli di tutti i triangoli ammonta a 180 gradi e, pertanto, possiamo asserire che, per ogni *n*, 1'*n*-spazio euclideo è piatto.

Questo cambiamento di prospettiva rimodella completamente la nostra visione della geometria e del rapporto fra geometria euclidea e non-euclidea. Una volta che definiamo una distanza, abbiamo delle linee rette. Esse sono geodetiche, ossia linee che tracciano la distanza minima fra punti vicini. La geometria euclidea non gode di particolari privilegi divini. Se definiamo la distanza usando il teorema di Pitagora (o comunque in modo tale che il teorema di Pitagora risulti vero), allora otteniamo che: per ogni punto passa una sola parallela a una retta data, i triangoli constano di 180 gradi, possono esistere triangoli simili di qualunque grandezza, e così via. Una superficie — o una varietà — su cui valgono gli enunciati equivalenti al quinto postulato è piatta. Per estensione, le regioni in cui la somma degli angoli dei triangoli è diversa da 180 gradi — e, in particolare, le regioni con una qualunque geometria non-euclidea — non sono piatte. Esse sono invece curve. Che cosa potrebbe esserci di più naturale? Il lavoro di Riemann, però, fece molto di più che riformulare potenzialmente la geometria. Esso aprì nuove possibilità per la scienza e la matematica moderne, e alterò radicalmente il modo in cui la geometria e la topologia si sarebbero sviluppate.

8
L’eredità di Riemann

L’ossessionante ritornello

> *Tutti mutati, interamente mutati:*
> *una bellezza terribile è nata*

della poesia di W. B. Yeats *Pasqua 1916* rende bene l’idea del radicale cambiamento di prospettiva introdotto da Riemann. Comprendere il punto di vista di Riemann è di fondamentale importanza per capire lo sviluppo della matematica e della scienza nel XX secolo.

Dalla lezione di Riemann abbiamo imparato che ogni superficie nell’ordinario 3-spazio euclideo ha una «metrica», quindi linee rette, quindi una geometria. Essa eredita la metrica (ossia, il modo di misurare la distanza) dallo spazio in cui si trova. Nei termini di Riemann, un cammino sulla superficie è certamente un cammino nello spazio euclideo che contiene la superficie, e quindi possiamo conoscere la velocità in corrispondenza di qualsiasi punto (poiché conosciamo la velocità a ogni punto di un cammino nello spazio euclideo). Un modo equivalente per determinare la distanza fra due punti senza parlare di velocità consiste semplicemente nel portare un metro a nastro (pensiamo a una corda flessibile ma che non si allunga) nello spazio circostante e distenderlo sulla superficie tra i due punti per misurarne la distanza.

Sfere e geodetiche

Per illustrare ulteriormente le idee di Riemann, consideriamo una sfera perfettamente rotonda nel 3-spazio: ossia, l’insieme di tutti i punti equidistanti da un punto dato (il centro della sfera). Sulla sfera, le geodetiche (o linee rette) sono i cosiddetti «cerchi massimi»: le curve tracciate facendo intersecare la sfera con un piano passante per il suo centro. Per renderci visivamente conto del fatto che un cerchio massimo traccia la più breve distanza fra qualunque coppia dei suoi punti, prendiamo una palla o un globo e segniamo due punti sulla sua superficie. Quindi prendiamo una corda e tendiamola fra i due punti: essa giacerà lungo un cerchio massimo.[1] Le linee longitudinali che passano sulla nostra Terra sono tutte cerchi massimi, mentre l’unica linea latitudinale che sia un cerchio massimo è l’equatore.[2] Le altre linee latitudinali possono essere espresse come le intersezioni fra un piano nello spazio e la Terra, ma (tranne nel caso dell’equatore) questo piano non passa attraverso il centro della Terra. Pertanto, a eccezione dell’equatore, le linee latitudinali non sono cerchi massimi, e quindi non sono rette. Si noti che, come sempre, con la parola «Terra» ci riferiamo alla superficie del nostro pianeta, e ciò di cui stiamo parlando sono quindi dei cammini vincolati a rimanere sulla superficie; se questo vincolo non sussistesse, la via più breve fra due punti sarebbe la linea retta tracciata nel 3-spazio che connette i due punti passando attraverso il mantello terrestre.

Attraverso ogni punto della sfera, e in qualunque direzione, passa un cerchio massimo. Un modo per rendersene visivamente conto è quello di trattare il punto dato come un polo e considerare l’insieme di linee longitudinali che lo congiungono al polo opposto (figura 19). Per esempio, supponiamo di trovarci a Parigi e di voler andare a Boston. Non pensiamo a Parigi come situata in mezzo all’emisfero settentrionale, ma consideriamola invece come se fosse un polo. Una delle linee

longitudinali che passano per il polo Parigi attraverserà la città di Boston. Quella è esattamente la direzione che cerchiamo.[3]

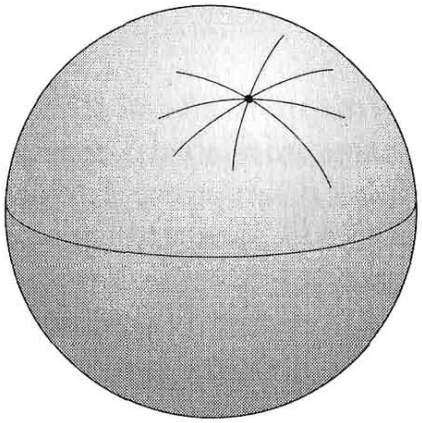


Figura 19: L'insieme di cerchi massimi che passano per un punto.

È raro che i percorsi lungo i cerchi massimi si presentino sulle mappe come linee rette, e che i percorsi che appaiono come linee rette siano delle geodetiche. Per esempio, Pechino e Filadelfia sono situate alla stessa latitudine. Se viaggiamo dall'una all'altra seguendo la linea latitudinale che le congiunge, percorriamo circa 16.300 chilometri. Il percorso lungo il cerchio massimo che le attraversa, invece, misura circa 11.000 chilometri e passa vicino al Polo Nord. E un tragitto notevolmente più breve, ed è quello che un pilota d'aereo percepirebbe come retto. Sulla maggior parte delle mappe del mondo, invece, questo cerchio massimo sembrerebbe prima puntare verso nord per poi ridiscendere. Le linee latitudinali, dal canto opposto, apparirebbero rette. Ciò è dovuto al fatto che le mappe del mondo disegnate su un foglio di carta piatto vengono inevitabilmente a falsare le distanze.

L'incomprensione del fatto che i cerchi massimi sono i percorsi più brevi tra due punti sulla Terra è stata fonte di alcune bizzarre discussioni. Molte religioni suggeriscono nei loro precetti la direzione verso cui pregare. Per esempio, l'antica tradizione biblica degli ebrei prevedeva di pregare rivolti verso Gerusalemme. Tuttavia, ciò veniva solitamente inteso nel senso che se uno si fosse trovato a ovest di Gerusalemme, avrebbe dovuto rivolgersi verso est. Secondo la tradizione Baha'i, bisogna pregare rivolti verso Acri. E la consuetudine dei primi cristiani era di rivolgersi a est. Tuttavia, tali dettami non erano del tutto uniformi, né vincolanti.

La pratica islamica, invece, è molto più precisa e prescrittiva. Il Corano istruisce chiaramente il fedele che sta pregando dicendogli: «Volgi dunque il tuo volto verso il Tempio Sacro, rivolgetevi tutti, ovunque siate, verso quella direzione» (Corano, 2:144). La direzione di cui si parla — ossia, la direzione della Sacra Moschea della Mecca — è chiamata *qibla,* e le moschee vengono costruite in modo da essere orientate in quel modo. Fin dall'inizio del Medioevo, la *qibla* era stata interpretata come la direzione lungo il cerchio massimo che conduce alla Mecca, e molti dei più grandi scienziati del mondo, che erano musulmani, avevano messo a punto diversi metodi per determinare tale direzione.

Tuttavia, le occasioni di disaccordo abbondano, e negli Stati Uniti ci sono state numerose discussioni sulla *qibla.* Nel 1953, durante la costruzione della moschea di Washington (D.C.), gli architetti consultarono il ministro del Lavoro egiziano al Cairo per sapere la direzione della *qibla* e, stando alle sue parole, orientarono la moschea a 56 gradi, 33 minuti e 15 secondi, in direzione nordest. Come poteva essere, si chiedevano i visitatori della moschea (ambasciatore egiziano incluso)? La Mecca si trova leggermente a sud di Washington. Seguirono un po' di notti agitate, mentre i calcoli venivano ricontrollati. Ne emerse che il percorso più breve fra Washington e la Mecca passa di fatto leggermente a nord.

Alcuni musulmani negli Stati Uniti non ne rimasero comunque molto convinti, e apparvero varie direttive che decretavano che le moschee avrebbero dovuto essere rivolte a sud-est anziché a nord-

est. Le discussioni si fecero anche piuttosto astiose. Una delle cause della confusione sta nel fatto che alcuni ritengono ingenuamente che una «linea lossodromica» — ossia, una linea che taglia i meridiani ad angolo costante — sia retta. In realtà, le linee lossodromiche sono rette solo quando vengono tracciate su una proiezione di Mercatore della Terra. Dato che la Terra ha un particolare punto, il Polo Nord, verso cui indicano le bussole, è relativamente semplice navigare lungo una rotta di questo tipo. Tuttavia, tale rotta non è una geodetica, come abbiamo visto nel caso della linea latitudinale che connette Filadelfia e Pechino. Di fatto, le linee lossodromiche che non sono né latitudini né longitudini finiscono per tracciare una spirale attorno ai poli (provate a pensare a che cosa accadrebbe se si continuasse a viaggiare in direzione nord-ovest).

In ogni caso, noi sappiamo che le longitudini e l'equatore sono geodetiche. Usando queste linee, è facile costruire triangoli geodetici: basta prendere due longitudini che scendono dal Polo Nord fino all'equatore e il segmento di equatore che le congiunge. Tutti i triangoli come questi sono triangoli isosceli con alla base due angoli retti. Dato che la somma degli angoli alla base è già di per sé pari a un angolo piatto, il triangolo avrà più di 180 gradi. Di fatto, possiamo facilmente costruire un triangolo equilatero con tre angoli retti e, quindi, una somma angolare pari a 270 gradi (figura 20).

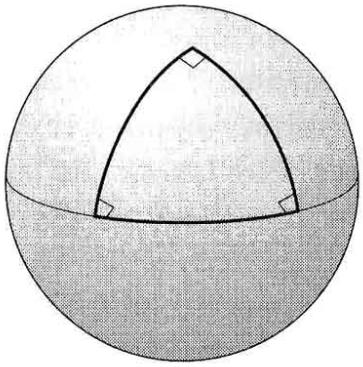


Figura 20: Un «triangolo sferico»

È facile rendersi conto che ogni triangolo tracciato sulla sfera ha una somma angolare superiore a 180 gradi. Il postulato delle parallele non è valido. Prendiamo una linea sulla sfera, diciamo una linea longitudinale che corre da nord a sud. Ora immaginiamo due cerchi massimi che la intersecano; anche se entrambi la intersecano a 90 gradi, come nella figura 21, essi finiranno comunque per incontrarsi (teniamo presente che le linee latitudinali non sono cerchi massimi, e quindi non sono rette!). La ragione di fondo è che sulla sfera non possono esserci rette parallele.

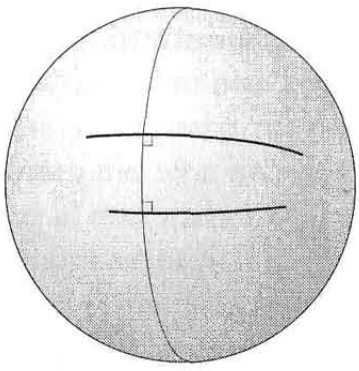


Figura 21: Sulla sfera non ci sono rette parallele: date due rette qualsiasi, esse finiranno per intersecarsi.

La geometria sulla sfera non è euclidea. Ce ne rendiamo conto non appena ci accorgiamo di avere un triangolo con una somma angolare diversa da 180 gradi. Se, come nel caso di una sfera rotonda, tutti i triangoli tracciati sulla superficie hanno somme angolari maggiori di 180 gradi, diciamo allora che la superficie ha curvatura positiva. La sfera rotonda ha un'ulteriore particolarità: è

perfettamente simmetrica e, quindi, la curvatura è la stessa in ogni punto.[4] Su una superficie non perfettamente rotonda, la curvatura può variare da punto a punto; e, di fatto, sulla Terra la curvatura varia, dato che il nostro pianeta è leggermente più piatto (vale a dire, meno positivamente curvato) ai poli.

Geometria sulle superfici

Riemann potè mostrare che ogni spazio con curvatura positiva costante è necessariamente finito: le geodetiche non si estendono all'infinito. I cerchi massimi vengono necessariamente a chiudersi. Lobačevskij e Gauss presero in considerazione un altro caso in cui il postulato delle parallele non vale, ossia quando c'è più di una parallela che passa per un punto esterno a una retta data. In tal caso, emerge che per ogni punto esterno a una retta devono passare infinite parallele alla retta stessa. Inutile dirlo, il quinto postulato non vale: due linee rette possono intersecarne una terza, tracciando angoli interni la cui somma è minore di due angoli retti, e tuttavia non incontrarsi mai. In questo caso, la somma degli angoli in un triangolo è sempre minore di 180 gradi. Inoltre, i triangoli con aree più grandi hanno somme angolari più piccole. Ogni superficie con la proprietà per cui tutti i triangoli su di essa tracciati hanno una somma angolare inferiore a 180 gradi è detta avere una curvatura negativa (figura 22).

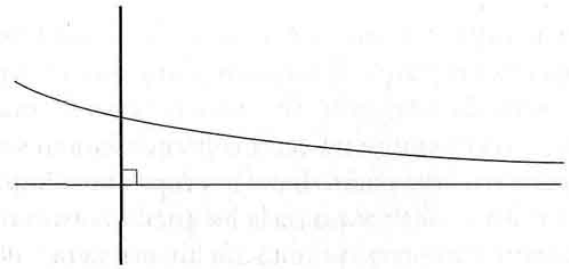


Figura 22: Due rette parallele che intersecano una linea verticale con angoli interni la cui somma è minore di 180 gradi; il quinto postulato non è valido. (Le linee rette su un piano iperbolico sembrano curve a un osservatore euclideo esterno al piano stesso.)

Nel 3-spazio, le superfici a forma di sella hanno curvatura negativa (ossia, i triangoli geodetici tracciati su tali superfici hanno una somma angolare inferiore a 180 gradi). Per converso, ogni superficie a curvatura negativa nel 3-spazio deve sempre avere la forma di una sella. Nella figura 23 abbiamo disegnato un triangolo i cui lati sono geodetiche. Si noti che, contrariamente al caso della sfera della figura 20, dove un triangolo i cui lati sono geodetiche — ossia, linee rette — sembra rigonfiarsi (avendo una somma angolare maggiore di 180 gradi), qui, su una superficie a forma di sella, un triangolo i cui lati sono geodetiche sembra risucchiato verso l'interno (avendo una somma angolare minore di 180 gradi). Naturalmente, un minuscolo esserino che vivesse su una delle due superfici vedrebbe invece le geodetiche come perfettamente rette, e per poter essere in grado di dire se il triangolo è rigonfiato o risucchiato verso l'interno dovrebbe misurarne la somma angolare.

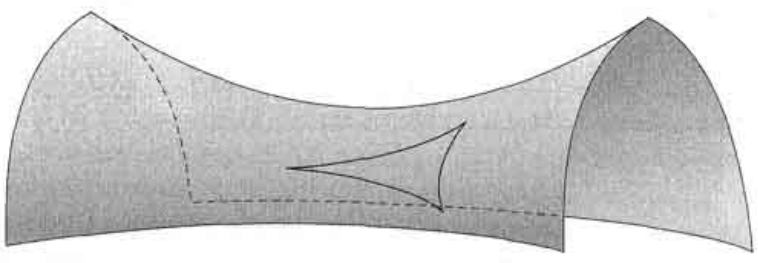


Figura 23: Una superficie a forma di sella.

C'è anche un altro modo di pensare la curvatura. Proprio come nel caso di un piano, su qualunque superficie su cui la distanza sia definita è possibile definire un cerchio come l'insieme dei punti equidistanti da un punto dato. Fin dai tempi dei babilonesi, sappiamo che sul piano il rapporto fra la lunghezza della circonferenza del cerchio centrato in quel punto e la lunghezza del suo diametro è una costante, chiamata , e che l'area del cerchio è π volte il suo raggio moltiplicato per se stesso. (Ciò viene espresso nella formula πr^2, dove il raggio r è metà del diametro.) Su una superficie a curvatura positiva, il rapporto fra la circonferenza di un cerchio e il suo diametro è minore di π, e l'area del cerchio è minore di quella data dalla vecchia formula. Su una superficie a curvatura negativa, invece, il rapporto fra la circonferenza e il diametro è maggiore di π, e l'area del cerchio è maggiore di quella indicata dalla formula. In ogni caso, quanto più è grande il raggio del cerchio, tanto più la sua area si allontanerà dal valore indicato da πr^2.

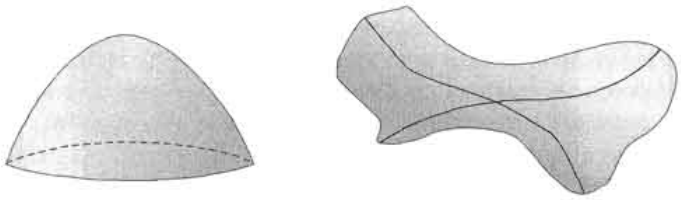


Figura 24: A sinistra, una superficie a curvatura positiva: la circonferenza e l'area di un cerchio sono più piccole. A destra, una superficie a curvatura negativa: la circonferenza e l'area di un cerchio sono più grandi.

Su una superficie a curvatura negativa, se partiamo da due punti molto vicini muovendoci lungo geodetiche che procedono in direzioni che appaiono parallele, le due linee divergeranno, poiché la superficie è più estesa. Su una superficie a curvatura positiva si verifica l'opposto. Nella sua lezione, Riemann non citò esplicitamente Lobačevskij e Bolyai, ma aveva senz'altro in mente i loro lavori.

Differenti nozioni di equivalenza

Dopo Riemann, divenne chiaro non solo che il medesimo oggetto matematico poteva contenere differenti strutture, ma anche che ci potevano essere differenti nozioni di equivalenza fra oggetti e strutture. Da un certo punto di vista, due oggetti con differenti strutture potrebbero sembrare identici, come due case costruite con la stessa pianta ma utilizzando materiali diversi. Da un'altra prospettiva, invece, essi potrebbero essere diversi come il giorno e la notte.

Da un punto di vista topologico, la nozione appropriata di equivalenza è quella di omeomorfismo: due spazi sono considerati equivalenti se tra di loro c'è un omeomorfismo. (Come ricorderemo, un omeomorfismo fra due spazi è una corrispondenza biunivoca fra di loro, tale che punti vicini sono mappati su punti vicini.) Parlando di superfici bidimensionali, la topologia è spesso chiamata «geometria del foglio di gomma», poiché possiamo visualizzare un omeomorfismo di un rettangolo — per fare un esempio — pensando a che cosa potremmo fare al rettangolo se fosse costituito da un foglio di gomma estremamente flessibile o da un materiale molto elastico. Mappare un rettangolo in una regione della superficie con un omeomorfismo è come stendere un foglio di materiale elastico aderente su quella regione della superficie. La topologia studia le proprietà che rimangono invariate rispetto agli omeomorfismi.[5]

Anche se Riemann non era primariamente interessato alla topologia,[6] egli contribuì comunque tantissimo a migliorare la nostra comprensione della topologia delle superfici.[7] Fu lui a introdurre il concetto di tagliare le superfici lungo curve chiuse in modo tale che la superficie rimanente diventi omeomorfa a un rettangolo. Il numero più piccolo di tagli necessari a raggiungere questo scopo costituisce l'invariante più importante della superficie[8] (ed è strettamente correlato al numero di tori nella scomposizione della somma connessa menzionata nel capitolo 3).

Anche se da un punto di vista topologico l'omeomorfismo è la nozione naturale di equivalenza fra due superfici (o, più in generale, varietà), due superfici che sono identiche da un punto di vista topologico possono apparire — come si è detto — molto differenti da un punto di vista geometrico. Una sfera rotonda, la superficie di un sottile sigaro e la superficie di un uovo (così come tutte le superfici rappresentate nella figura 2 del capitolo 3) sono topologicamente identiche ma geometricamente differenti. Come sottolineò Riemann, una geometria è una struttura aggiuntiva su una varietà. Essa definisce una distanza tra due punti qualsiasi di una varietà. Se una superficie si trova all'interno di uno spazio più grande con una determinata geometria (come il 3-spazio euclideo), essa eredita una geometria dallo spazio più grande. È possibile definire differenti geometrie, o distanze, sulla stessa varietà. La nozione naturale di equivalenza per varietà che hanno una geometria è detta «isometria». Un'isometria è una mappa biunivoca che conserva le distanze. Se due punti originari si trovano esattamente a un milionesimo di centimetro l'uno dall'altro, le loro immagini sotto un'isometria si troveranno esattamente a un milionesimo di centimetro l'una dall'altra. Se tra varietà dotate di geometria c'è un'isometria, queste varietà sono dette «isometriche».

L'isometria è la nozione di equivalenza che preserva le geometrie ed è differente dall'omeomorfismo, che è la nozione di equivalenza propria della topologia. Un'isometria è un omeomorfismo, ma non vale l'inverso.[9] Abbiamo appena detto che è possibile visualizzare un omeomorfismo di un rettangolo immaginando che il rettangolo sia costituito da un foglio di materiale elastico e pensando di stendere questo foglio su qualche superficie. Per visualizzare un'isometria, che preserva le distanze, possiamo immaginare di vestire (o fasciare) qualcosa con una porzione di tessuto che sia flessibile ma che non si allunghi. Se stendiamo un rettangolo di tessuto ritagliato da un lenzuolo di lino su una parte di una superficie (facendolo aderire), otteniamo un'isometria fra il rettangolo e la parte di superficie da esso coperta (e quella parte di superficie è detta essere «piatta»). Pertanto, un cilindro è piatto, perché è possibile avvolgerlo perfettamente nel detto modo. Dal canto opposto, una sfera (o, se vogliamo, la sommità della nostra testa) non è piatta, perché non sarebbe possibile coprirla perfettamente con un lenzuolo senza che quest'ultimo formi delle pieghe.

Tuttavia, è possibile immaginare che un abile sarto (o, meglio, un tessitore) produca una stoffa dalla forma sferica in grado di adattarsi perfettamente alla nostra calotta cranica. Indossando questo berretto, otterremmo un'isometria fra tale copricapo e la parte della testa da esso coperta. La stoffa dovrà avere, all'interno di un cerchio di un determinato raggio, un'area minore di quella che questo stesso cerchio racchiuderebbe se fosse tracciato su un lenzuolo piatto. I sarti ottengono questo effetto facendo delle *pince* nel materiale — tagliando via una fetta di tessuto e ricucendo quello che rimane (figura 25). Naturalmente, per coprire le cime di teste (o di sfere) di grandezze differenti occorrerebbero stoffe con differente curvatura. Qualunque parte della superficie di qualunque oggetto che potesse essere coperta perfettamente da questo tessuto sferico sarebbe isometrica alla calotta di una sfera (e avrebbe la stessa curvatura positiva del tessuto). Per riporre un pezzo di tessuto con curvatura positiva in un cassetto, dovremmo prima ripiegarlo. Pensiamo a come si piega uno zucchetto.

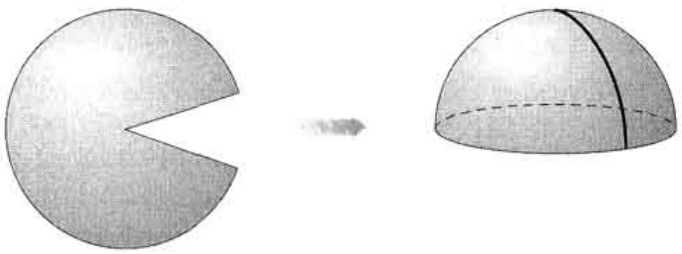


Figura 25: La creazione di un copricapo a curvatura positiva; occorre tagliar via un pezzo di tessuto.

Al contrario della calotta cranica, l'area a forma di sella sul fianco di una donna, immediatamente sopra l'anca, ha una curvatura negativa (figura 26). Proviamo a immaginare un drappo di tessuto in

grado di coprirla perfettamente. In questo caso, la regione all'interno di un cerchio di un determinato raggio ha un'area maggiore di quella che lo stesso cerchio racchiuderebbe sul piano; quindi, per creare il drappo il sarto potrebbe partire da un pezzo di tessuto piatto, tagliarlo come abbiamo visto nel caso del berretto ma, anziché ricucire assieme i bordi lungo la linea di taglio, inserire un ulteriore pezzo di tessuto. A seconda di come l'area aumenta rispetto al raggio, si hanno drappi di tessuto con curvatura differente.

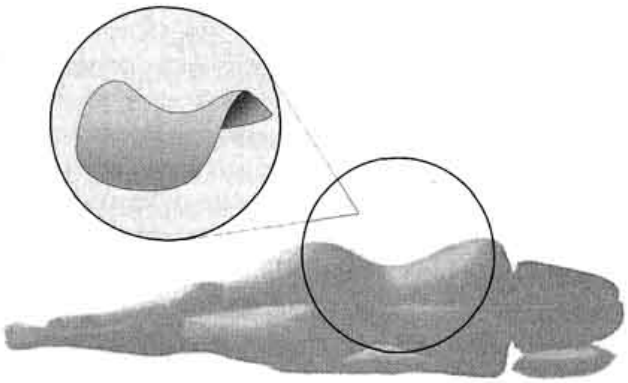


Figura 26: Un drappo di tessuto con curvatura negativa avvolgerà il fianco di una donna.

I drappi di tessuto con curvatura negativa produrranno numerose pieghe quando cercheremo di appiattirli adagiandoli in un cassetto (figura 27).
Per concepire un'isometria, possiamo quindi immaginare di rivestire una parte di una superficie con un drappo di tessuto: la caratteristica saliente è che il tessuto dev'essere flessibile, ma non elastico.

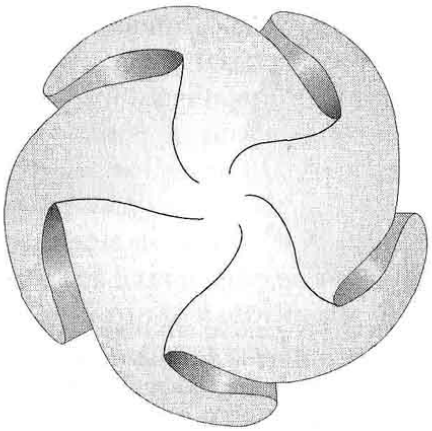


Figura 27: Un drappo di tessuto con curvatura negativa si arriccia quando giace su una superficie piatta.

Per inciso, se cercassimo di estendere in tutte le direzioni un tessuto elastico con curvatura positiva costante, esso si richiuderebbe formando una sfera. Se invece cercassimo di estendere in tutte le direzioni un tessuto con curvatura negativa costante, ciò che otterremmo sarebbe una superficie chiamata «piano iperbolico». Questa superficie diventerebbe sempre più ampia e finiremmo per non poterla più contenere nel 3-spazio euclideo.[10] In seguito vedremo altri possibili modi di concepire questa superficie; ad esempio, se prendiamo un poligono su una superficie piatta e ne aumentiamo la scala, gli angoli rimangono identici e il rapporto fra le lunghezze dei lati corrispondenti resta lo stesso. Se prendiamo un poligono su una superficie con curvatura positiva e ne aumentiamo la scala, i suoi lati non crescono con la velocità che ci aspetteremmo e gli angoli fra essi compresi diventano più grandi (figura 28, a sinistra). Se invece prendiamo lo stesso poligono su una superficie con curvatura negativa e ne aumentiamo la scala, i suoi lati diventano più grandi di quanto ci aspetteremmo e gli angoli diventano più piccoli (figura 28, a destra). Se la superficie a curvatura negativa si estende all'infinito e il poligono è regolare, allora aumentando la scala del

poligono potremo ottenere degli angoli che si avvicinano a piacere allo 0.

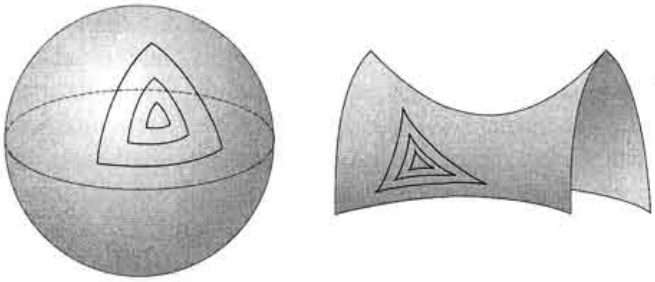


Figura 28: Espandendo un poligono su una superficie a curvatura positiva la somma angolare aumenta, mentre su una superficie a curvatura negativa decresce. Su una superficie piatta, la somma angolare rimane costante.

I punti principali della lezione di abilitazione di Riemann

• Occorre distinguere la realtà matematica dalla realtà fisica. Riemann intende parlare solo di oggetti matematici.
• L'indagine su differenti spazi matematici ci fornisce diversi potenziali modelli per la possibile forma del nostro universo, e ci evita di rimanere bloccati da preconcetti troppo limitanti.
• Gli spazi continui possono avere un numero qualsiasi di dimensioni e possono persino essere infinito-dimensionali.[11]
• Occorre distinguere fra il concetto di uno spazio e il concetto di uno spazio con una geometria. Lo stesso spazio può avere geometrie differenti. Una geometria è una struttura addizionale su uno spazio. Oggi diciamo che occorre distinguere fra topologia e geometria.
• Le varietà comprendono una classe particolarmente affascinante di spazi i quali possono essere mappati, nel senso che, intorno a ogni punto, i loro punti possono essere messi in corrispondenza biunivoca con *n*-ple di numeri. Si tratta degli spazi su cui è possibile lavorare con il calcolo infinitesimale.
• Un utile modo per specificare una geometria su una varietà consiste nell'avere un metodo per misurare la velocità di un oggetto che si sta muovendo lungo una curva. La velocità potrebbe differire da punto a punto. Riemann sviluppa il calcolo infinitesimale necessario per raggiungere questo obiettivo e ne trae le conseguenze. In particolare, possiamo definire le linee rette e misurare gli angoli. La curvatura misura la deviazione da triangoli aventi 180 gradi.
• Una classe affascinante di varietà (e di geometrie su di esse) è costituita da quelle che hanno curvatura costante. Questi sono gli unici spazi che permettono il movimento di corpi rigidi (vale a dire, di corpi in cui lunghezze e angoli non variano) e sono i più simmetrici fra tutti gli spazi.
• Considerato nella sua totalità, il nostro universo potrebbe anche apparire molto diverso dal 3-spazio euclideo. Inoltre, se scrutassimo realtà sempre più minuscole, forse l'estremamente piccolo, anziché assomigliare a una varietà, ci potrebbe apparire come discreto, ovvero non continuo, o come qualcosa di totalmente altro.

Le conseguenze della lezione di Riemann

La lezione di abilitazione di Riemann, così come gran parte del suo lavoro, ebbe un effetto dirompente. Alcune delle questioni da lui affrontate erano già nell'aria. Egli, però, le definì in una forma precisa — servendosene per inquadrare e riformulare in un modo completamente nuovo le riflessioni precedenti — e, dov'era necessario, sviluppò nuovi strumenti e metodi matematici per implementare le sue idee e spingere la matematica in direzioni totalmente nuove. Una volta

comprese le sue parole, non sarebbe più stato possibile guardare l'argomento in discussione nello stesso modo. Riemann sovvertì i termini del discorso. Fu come se una persona quasi cieca tornasse improvvisamente a vedere. Dal momento che Riemann ha cambiato il nostro modo di pensare, è difficile dire con esattezza dove abbia influenzato il lavoro degli altri: il suo influsso è infatti rintracciabile ovunque e, anziché indebolirsi, si è progressivamente rafforzato col passare del tempo, considerato che sempre più studiosi hanno penetrato le sue idee e ne hanno afferrato l'utilità. La matematica contemporanea nasce con Riemann.

La comprensione e l'assimilazione di ciò che Riemann aveva detto nella sua lezione del 1854 avrebbero richiesto molti anni. Immediatamente dopo la pubblicazione della tesi, il celebre fisico Hermann von Helmholtz annunciò che lui stesso aveva pensato alla possibilità di spazi multi-dimensionali. Sostenne che il punto di partenza corretto era quello di fissare come requisito che fosse possibile muovere oggetti solidi nello spazio senza doverli deformare. Helmholtz potè mostrare che ciò era equivalente a richiedere che lo spazio avesse una curvatura costante. Gli spazi con curvatura costante sono geometricamente affascinanti, ma la flessibilità supplementare permessa da Riemann si sarebbe dimostrata estremamente preziosa. La superficie del nostro mondo è topologicamente una sfera (ossia, può essere messa in una corrispondenza biunivoca continua con una sfera), ma non è una superficie con curvatura costante: non è perfettamente rotonda, ma è appiattita ai poli e presenta diverse irregolarità (montagne e valli).

William Clifford — un geometra di talento che preparò la prima traduzione in inglese della lezione di abilitazione di Riemann — riconobbe immediatamente le potenzialità di questa geometria ai fini della descrizione dei fenomeni fisici:

> Di fatto, sostengo: (1) Che le piccole porzioni di spazio hanno una natura analoga a quella di piccole colline su una superficie che, in media, risulta piatta; (2) Che questa proprietà di essere curvata o distorta passa continuamente da una porzione di spazio all'altra come una sorta di onda; (3) Che questa variazione della curvatura dello spazio è ciò che in realtà ha luogo in quel fenomeno che chiamiamo il moto della materia, sia ponderabile sia eterea; (4) Che in questo mondo fisico non avviene nient'altro che tale variazione, soggetta, forse, alla legge della continuità.[12]

Purtroppo anche Clifford, come lo stesso Riemann, morì di tubercolosi prima di raggiungere i quarant'anni. Clifford non ebbe né il tempo né le competenze per sviluppare adeguatamente le proprie intuizioni. Tuttavia, i suoi pensieri prefigurarono alcuni concetti che sarebbero giunti a piena maturazione nella teoria della relatività generale. La geometria riemanniana offrì a Einstein il linguaggio matematico di cui il padre della relatività aveva bisogno per poter esprimere le proprie teorie. E fuori discussione che le profonde intuizioni fisiche di Riemann giocarono un ruolo vitale nella sua matematica, e che egli riconobbe chiaramente delle connessioni fra le proprie concezioni geometriche e la fisica.

Riemann non inventò in prima persona l'intera geometria riemanniana come la conosciamo oggi, e nemmeno la maggior parte di essa: egli si limitò a darne l'avvio. Elaborò alcune delle sue teorie in un articolo sulla conduzione termica che presentò all'Accademia di Parigi, ma dopo il 1862 le sue condizioni di salute precipitarono e non visse abbastanza per poterle sviluppare ulteriormente. Per elaborare compiutamente le intuizioni di Riemann sarebbero stati necessari anni di duro e creativo lavoro da parte di moltissime persone.

Anche se nella sua tesi di abilitazione Riemann non menzionò esplicitamente la geometria non-euclidea, il suo lavoro costituì la base su cui quest'ultima avrebbe fatto il proprio ingresso nella matematica ufficiale. L'opera di Riemann, infatti, tracciò un quadro concettuale in cui la geometria non-euclidea sembrava altrettanto naturale di quella euclidea, ed entrambe apparivano come casi particolari di una concezione della geometria molto più ampia.

Negli anni Sessanta dell'Ottocento un geometra italiano, Eugenio Beltrami (1835-1900), aveva scoperto che le geodetiche su una superficie a curvatura negativa costante si comportavano come le rette nella geometria di Lobačevskij. Egli pubblicò i propri risultati in un articolo, oggi famoso, in cui evidenziava che per ottenere la geometria non-euclidea non è necessario introdurre nuovi concetti o idee nella geometria euclidea. Come esempio di una superficie a curvatura negativa

costante, Beltrami prese la «pseudosfera» (figura 29), che è la superficie ottenuta facendo ruotare una curva chiamata «trattrice» intorno al suo asintoto.[13] La pseudosfera presenta tuttavia un problema tecnico: ha uno spigolo appuntito (il cerchio generato dalla rotazione del punto cuspidale della trattrice), e un abitante che vivesse su una superficie del genere giungerebbe a quello spigolo in un tempo finito. Non era chiaro se esistessero superfici con curvatura negativa costante e prive di margini.

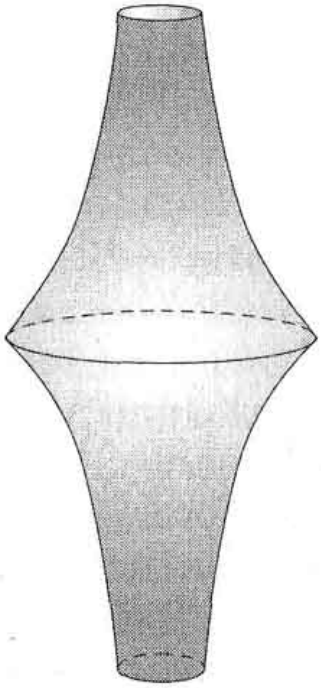


Figura 29: La pseudosfera.

Luigi Cremona (1830-1903), il principale geometra italiano dell'epoca, non mostrò grande entusiasmo nel leggere la bozza dell'articolo, e le sue obiezioni spinsero Beltrami a riporlo in un cassetto. Beltrami non avrebbe mai pubblicato il suo scritto se non avesse avuto modo di leggere una copia della tesi di abilitazione di Riemann, che gli fece comprendere che quanto lui stesso aveva detto era del tutto sensato. Le superfici con curvatura costante esistevano, e il fatto che potessero o meno essere immerse nel 3-spazio era irrilevante. Qualche anno dopo, l'articolo di Beltrami avrebbe esercitato una decisiva influenza su Poincaré.

La distinzione posta da Riemann tra realtà fisica e realtà matematica è di estrema importanza, anche se spesso viene dimenticata. E enormemente liberatorio non doversi costantemente preoccupare se questa o quest'altra superficie che possiamo costruire con chiarezza possa essere propriamente immersa nel 3-spazio. Riemann ha offerto ai matematici uno straordinario terreno di gioco. Non dobbiamo preoccuparci se lo spazio euclideo 5-dimensionale esista oppure no. Esso esiste: è semplicemente l'insieme delle 5-ple di numeri reali con distanza fra due punti definita da una variante della formula del teorema di Pitagora. Perché mai non dovrebbe esistere? Analogamente, è facile costruire esempi di tori piatti: possiamo definirli come coppie, ciascuna delle quali consiste di un punto di un cerchio unitario e di un punto dell'altro, con una formula appropriata per la metrica. Possiamo calcolare qualunque cosa. Non potrebbe essere più reale.

Alcune delle idee matematiche che venivano discusse nelle università tedesche dell'epoca filtrarono nella stampa divulgativa. Un collega di von Helmholtz a Lipsia, lo psicologo e fisiologo Gustav Fechner, scrisse un breve racconto, *Lo spazio ha quattro dimensioni,* sotto lo pseudonimo di Dr. Mises.[14] Fechner procedette per analogia, descrivendo come degli esseri bidimensionali avrebbero percepito una terza dimensione. Egli prese il tempo come una quarta dimensione. L'analogia di Fechner era destinata a esercitare un certo fascino sugli scrittori, e nel 1884, in

Inghilterra, Edwin Abbott scrisse un piccolo, grazioso libro — in parte una satira della società vittoriana, in parte un raffinato esercizio di geometria — intitolato *Flatland: A Romance of Many Dimensions.* Il frontespizio recita:

Agli
abitanti dello SPAZIO IN GENERALE
e a H. C. IN PARTICOLARE
è dedicata quest'opera
da un umile nativo della Flatlandia
nella speranza che,
come egli fu iniziato ai misteri
delle TRE dimensioni
avendone sino allora conosciute
SOLTANTO DUE
così anche i cittadini di quella regione celeste
possano aspirare sempre più in alto
ai segreti delle QUATTRO CINQUE O ADDIRITTURA SEI dimensioni
in tal modo contribuendo
all'arricchimento dell'IMMAGINAZIONE
e al possibile sviluppo
della MODESTIA, qualità rarissima ed eccellente
fra le razze superiori
dell'UMANITÀ SOLIDA.

II romanzo di Abbott viene ristampato ancora oggi, e vale tuttora la pena di leggerlo.[15] Sul piano della divulgazione popolare del concetto di dimensioni superiori, questo libro da solo ha probabilmente fatto più di tutti i corsi di matematica del XX secolo messi assieme.

Il lato umano di Riemann

Detto tutto quello che c'era da dire, resta ancora un'aura di profondo mistero che aleggia intorno a Riemann.

Fu uno dei pensatori più arditi di tutti i tempi, eppure tutte le testimonianze sono unanimi nel ritrarlo come una persona estremamente timida — a un livello quasi patologico — nelle relazioni sociali. Di fatto, si trovava a proprio agio soltanto in famiglia. Com'è mai possibile che un individuo così schivo, deferente e fin troppo modesto abbia trovato il coraggio di tenere una dissertazione in cui sfidava nientemeno che Kant, il più sacrosanto di tutti i pensatori dell'Illuminismo? Se si fosse trovato davanti a un pubblico di soli matematici, forse la cosa sarebbe stata ancora comprensibile, ma fra i professori raccolti ad ascoltarlo c'erano anche dei filosofi. In un recente libro di successo, *Good to Great,*[16] il consulente aziendale americano Jim Collins e un gruppo di ricercatori hanno identificato otto grandi società che hanno costantemente superato le altre compagnie. Gli esperti hanno scoperto che queste imprese erano tutte guidate da manager modesti, accomunati da numerosi tratti personali visti da Collins come indici di una «attitudine al comando di livello cinque». Una di queste caratteristiche era che nessuno, eccetto gli addetti ai lavori, aveva mai sentito parlare di quei dirigenti: non comparivano sulle copertine dei rotocalchi, non erano persone appariscenti, conducevano una vita semplice, erano molto modesti, attribuivano il loro successo ad altri ma erano determinati ed estremamente coraggiosi. La combinazione di modestia e audacia nel sostenere le proprie posizioni descrive molto bene il carattere di Riemann.

Riemann decise di non pubblicare il testo della sua lezione di abilitazione: era troppo perfezionista e troppo impegnato (le lettere a suo fratello accennano a quanto fosse sempre più assorbito nelle riflessioni sui rapporti fra matematica e fisica). Dopo la sua lezione, a Riemann sarebbe rimasta solo un'altra dozzina d'anni. Morì nel 1866, un mese prima del suo quarantesimo compleanno, sulle rive del Lago Maggiore, in Italia. Il matematico Richard Dedekind, suo amico e biografo, ci presenta questo resoconto dei suoi ultimi momenti: «Il giorno prima della sua morte

lavorò sotto un fico, allietato nello spirito dal meraviglioso panorama che lo circondava [...] La vita lo abbandonò dolcemente, senza spasmi o agonia [...] Disse a sua moglie: “Da’ un bacio a nostra figlia”. Sua moglie ripetè assieme a lui il Padrenostro; lui ormai non poteva più parlare [...] Lei sentì la sua mano diventare sempre più fredda tra le sue, e con pochi ultimi sospiri il suo puro, nobile cuore aveva cessato di battere. Quell’animo gentile che gli era stato instillato nella casa paterna lo aveva accompagnato per tutta la vita, e anche lui, come suo padre, aveva servito fedelmente Dio, anche se in un modo diverso».[17]

Così tante idee profonde, così poco tempo per coltivarle. Nei decenni successivi, Riemann avrebbe tenuto occupate intere generazioni di matematici in tutto il mondo. Ricordiamo il notevole concorso di circostanze favorevoli che permisero a un intelletto così singolare di fiorire. C’era il sistema educativo tedesco, al cui vertice stava l’università di ricerca, e ci fu la notevole apertura mentale dimostrata da individui esterni al sistema universitario, come i fratelli Humboldt e Creile. Senza le pressioni di Alexander Humboldt, Dirichlet non avrebbe ottenuto una cattedra in Germania; e senza l’influenza di Dirichlet, la matematica di Riemann sarebbe stata molto diversa. Data la natura profondamente umana della scoperta matematica, dobbiamo forse accettare il fatto che una matematica così bella potrebbe svilupparsi a causa di una serie di eventi accidentali. Ma, di certo, sapere che anche oggi ci sono centinaia di giovani di talento che non avranno occasione di esprimere appieno le loro potenzialità è una cosa che ci fa riflettere.

9
Klein e Poincaré

Poincaré nacque nel 1854, due settimane prima della fatidica lezione di abilitazione di Riemann. Per quasi trent'anni, tuttavia, egli non seppe praticamente nulla di Riemann. In quel periodo, le idee riemanniane avevano iniziato a interagire con quelle di altri pensatori e a diffondersi in quasi tutte le aree della matematica, anche se in gradi differenti a seconda dei luoghi e dei tempi. L'influenza di Riemann si faceva sentire a livello sia di stile, sia di sostanza. Egli aveva cercato di comprendere le cose, procedendo non solo attraverso i calcoli, ma per mezzo del pensiero, cercando di individuare i concetti più appropriati.[1] Di lui si era conosciuta un'ispirazione che sembrava sgorgare da una profonda contemplazione non verbale della geometria, della fisica e della filosofia, e che trasformava ogni campo della matematica sul quale il suo inquieto intelletto veniva a posarsi. Dopo Riemann, divenne impossibile sostenere seriamente che le idee topologiche e geometriche non fossero essenziali per una comprensione più profonda dell'analisi, o che i numeri complessi fossero soltanto una semplice abbreviazione di comodo. Le dimensioni superiori e le altre geometrie divennero realtà matematiche di centrale importanza, dotate di un profondo rapporto con il nostro modo di pensare il mondo in cui viviamo.

Se il lavoro di Riemann segnò l'inizio della matematica come la intendiamo oggi, la sua morte, nel 1866, annunciò l'alba dell'epoca politica contemporanea. Durante l'arco della vita di Riemann, il nazionalismo emerse con forza e l'Europa iniziò a riorganizzarsi lungo quei confini che possiamo riconoscere ancora oggi. L'impero asburgico, un tempo potente, iniziò la sua lenta dissoluzione. Intorno alla metà degli anni Sessanta, la penisola italiana era ormai stata sostanzialmente unificata. In Germania, il fallimento dei moti rivoluzionari del 1848 ebbe effetti che, in ultima analisi, si sarebbero dimostrati catastrofici. I politici conservatori, come Otto von Bismarck[2] (che aveva studiato legge a Gottinga al tempo del licenziamento dei Sette), consolidarono il potere in Prussia e crearono uno Stato apertamente militarista, che già nel 1850 aveva iniziato a prepararsi per la guerra contro la Francia. La tattica dei francesi di prevenire a ogni costo l'unificazione tedesca si ritorse contro di loro ed ebbe l'unico effetto di rafforzare fra i tedeschi il sentimento nazionalistico.

La Prussia sconfisse pesantemente l'Austria nella guerra austro-prussiana del 1866 e creò la Confederazione della Germania settentrionale, alla quale vennero annessi diversi Stati tedeschi sottratti all'influenza austriaca. Quando Riemann partì per il suo ultimo viaggio in Italia, la Prussia aveva appena invaso lo Stato di Hannover, annettendolo. Nel 1870, Bismarck, allora primo ministro, provocò la Francia spingendola a dichiarare guerra alla Prussia. Il conflitto, oggi noto come guerra francoprussiana, fu breve, sanguinoso e brutale. I prussiani sbaragliarono l'esercito francese — mal preparato e troppo sicuro di sé — nella battaglia di Sedan. L'imperatore Napoleone III venne fatto prigioniero e costretto ad abdicare. Parigi venne messa sotto assedio. Quasi 200.000 soldati — l'80 per cento dei quali erano francesi — vennero uccisi e altri 250.000 rimasero feriti.

La percezione che l'aggressore fosse la Francia aveva unito la Germania. Durante le trattative di pace, a Versailles venne proclamato il nuovo impero tedesco. Il re Guglielmo IV di Prussia divenne Guglielmo I Kaiser del Reich tedesco e l'obiettivo dei rivoluzionari del 1848, l'unità nazionale, fu infine raggiunto — «forgiato col sangue e col ferro», come sottolineò con soddisfazione Bismarck. Il prezzo fu la disastrosa prima metà del XX secolo.[3]

Il primato della Germania crebbe in tutti i campi. La Prussia, che era stata clemente con gli austriaci sconfitti, impose alla Francia pesanti riparazioni di guerra, che alimentarono un boom economico tedesco. L'emergere delle università di ricerca aveva professionalizzato i docenti e aveva accentuato la distanza intellettuale sia fra le diverse discipline accademiche, sia fra ogni

disciplina e i settori istruiti della popolazione. Il ministro prussiano dell'Istruzione Friedrich Althoff (1839-1908) fu un amministratore di talento, con un'ottima preparazione accademica, deciso a rafforzare la matematica tedesca.

Va detto che anche altrove c'erano degli abili matematici. L'aumento della ricchezza e i movimenti nazionalisti avevano avuto un effetto positivo sulla matematica. In Italia stavano emergendo numerosi geometri molto validi; Parigi rimaneva ancora la capitale intellettuale del mondo; le università britanniche continuavano a distinguersi non tanto per le facoltà, ma per i singoli individui di talento e lo stesso si poteva dire anche della Scandinavia; la Russia aveva una forte tradizione matematica che avrebbe continuato a rafforzarsi; gli Stati Uniti stavano emergendo da una disastrosa guerra civile ed erano attraversati da un vivace interesse per la ricerca scientifica di prim'ordine.

Nessuna nazione, tuttavia, era in grado di rivaleggiare con la Germania. L'apparato di ricerca tedesco era in piena attività, ormai consapevole della propria eccellenza. La combinazione di diversi fattori — la competitività, un'amministrazione centrale attenta e un corpo docente professionale concentrato sul progresso della conoscenza — produsse risultati di qualità eccezionalmente elevata. Il calibro degli studi portati avanti nelle università tedesche era tale da far mangiare la polvere agli altri centri. Presso i dipartimenti di matematica di quasi tutte le università — Lipsia, Halle, Königsberg, Bonn, Erlangen, per citarne solo alcune — insegnavano professori che vengono ricordati ancora oggi. Le due università più grandi erano quelle di Berlino e di Gottinga. La prima aveva il vantaggio di avere più facoltà vicine e di trovarsi in una grande città. Ma Gottinga — l'università di Gauss, Dirichlet e Riemann — fiorì al di là di ogni aspettativa.[4] Sotto il lungimirante — e abile amministratore — Felix Klein (e i professori da lui assunti, come David Hilbert) e il suo successore Richard Courant, Gottinga raggiunse uno status quasi leggendario.[5] Klein, in particolare, vedeva lo sviluppo della matematica nello spirito di Riemann quasi come un sacro compito radicato nella natura stessa dell'università.

Felix Klein

Felix Klein, figlio del segretario del capo del governo prussiano, nacque nell'aprile 1849, proprio mentre la rivoluzione tedesca veniva soffocata. Di bella presenza, di buona famiglia e spigliato nei rapporti sociali, era un leader nato e si qualificò ben presto come uno dei matematici più promettenti della sua epoca. Nel 1870, allo scoppio della guerra franco-prussiana, si trovava a Parigi. Si affrettò a tornare in patria e prese parte allo sforzo bellico come infermiere. Nelle fila dell'esercito servì con il futuro ministro dell'Istruzione prussiano, Althoff; i due uomini svilupparono una profonda stima reciproca. Dopo un breve periodo a Gottinga al termine della guerra, Klein venne nominato professore ordinario all'Università di Erlangen all'età di soli ventitré anni, una cosa quasi inaudita. Tre anni dopo, nel 1875, si trasferì nella vicina Monaco, si sposò, ottenne una cattedra a Lipsia nel 1880 e, nel 1886, fece ritorno a Gottinga.

Come Riemann, anche Klein lavorava nel campo della teoria delle funzioni e nutriva forti interessi per la geometria e la topologia. Nel quadro delle cerimonie di insediamento alla cattedra di professore ordinario, dovette presentare un sunto del suo programma di studio. Questa bozza, in seguito diventata famosa come il «programma di Erlangen»,[6] tracciava una visione innovativa della geometria, con un'enfasi diversa rispetto a quella riemanniana. Una delle idee di Riemann più facilmente assimilabili è quella secondo cui è necessario definire che cosa si intende per linea retta ed è importantissimo il modo in cui quest'ultima viene definita. Ciò, di fatto, era già stato sottolineato più di mille anni prima da Proclo nel suo commentario agli *Elementi* di Euclide. L'identificazione riemanniana delle linee rette con le geodetiche è l'unica definizione ragionevole dal punto di vista degli abitanti di uno spazio: ai loro occhi, le linee diverse dalle geodetiche non apparirebbero rette. Anche i greci di Alessandria lo sapevano (così come sapevano che in alcuni spazi non esistono geodetiche parallele, mentre in altri esistono ma potrebbero non essere uniche). Tuttavia, molti ritenevano che la definizione di geometria proposta da Riemann fosse troppo

inclusiva: se uno spazio ha una metrica, c'è una geodetica che passa attraverso ogni punto in ogni direzione. Ma la geometria non dovrebbe essere qualcosa di speciale, simmetrico, armonico? Dire che una sfera rotonda ha una geometria è un conto, ma dire la stessa cosa di una massa bitorzoluta che ha la forma di una patata è un altro.

Per Klein, le geometrie riflettevano le simmetrie, e gli oggetti geometrici — e in particolare le linee — erano quelli che rimanevano immutati sotto un determinato insieme di trasformazioni. Questa concezione presentava un affascinante collegamento con l'algebra, nel significato che i matematici danno a questo termine — ossia come lo studio degli insiemi che hanno una o più operazioni. Un insieme con una singola operazione che obbedisce a determinati assiomi è chiamato «gruppo».[7] Gli insiemi di trasformazioni biunivoche di uno spazio su se stesso hanno un'operazione naturale: se noi compiamo una trasformazione e poi un'altra, il risultato che otteniamo è una terza trasformazione che può essere vista come il «prodotto» (o composizione) delle prime due. Analogamente, l'operazione che annulla una trasformazione può essere pensata come un'altra trasformazione, detta l'«inversa» della trasformazione originale.

Se l'insieme è tale che l'inversa di ogni trasformazione appartenente all'insieme e il prodotto di due trasformazioni qualunque appartenenti all'insieme è a sua volta una trasformazione appartenente all'insieme, allora l'insieme è un gruppo; e sono proprio questi gli insiemi che risultano di maggior interesse. Nella concezione del programma di Erlangen formulato da Klein, la geometria veniva vista come lo studio delle proprietà invarianti rispetto a gruppi di trasformazioni. Prendendo un differente gruppo di trasformazioni su uno spazio, avremo una geometria differente. I gruppi che emergono nelle geometrie più semplici vennero studiati per la prima volta da un amico di Klein, Sophus Lie. Si scoprì che gli spazi massimamente simmetrici rispetto ai più semplici di questi gruppi sono connessi a spazi in cui la curvatura è costante. Era tutto molto ordinato.

I punti di vista di Klein e di Riemann non erano naturalmente gli unici. Altri matematici, in particolare Hilbert, ritenevano che non si dovesse aver bisogno di definire i punti o le linee rette, ma che ci dovesse essere un insieme di assiomi ragionevolmente semplice in grado di caratterizzare la geometria euclidea. È possibile pensare la geometria di Riemann in modo più algebrico, ma gli oggetti algebrici avrebbero dovuto aspettare fino alla seconda metà del XX secolo.[8]

Nel 1880, Klein aveva il mondo in pugno. Insegnante eccellente, aveva attratto a Lipsia un gran numero di studenti di talento. Egli ampliò il lavoro di Riemann e non poteva fare a meno di immaginare di esserne il successore intellettuale. Poi, nei primi mesi del 1881, vide tre brevi note di un certo Henri Poincaré, intitolate *Sur les fonctions fuchsiennes* (Sulle funzioni fuchsiane), pubblicate negli atti dell'Accademia francese delle scienze.[9] Chi era costui? Un francese? E della sperduta Caen, per giunta. Perché non aveva mai sentito parlare di lui? Come aveva fatto Poincaré a ottenere questi risultati? E perché mai aveva dato a queste funzioni — cui Klein era profondamente interessato — il nome di Lazarus Fuchs (1833-1902), un professore di Heidelberg che non si avvicinava neppure lontanamente al talento di alcuni dei colleghi di Gottinga?

Klein decise di scrivergli immediatamente. In seguito, per lui nulla sarebbe più stato lo stesso: non avrebbe più brillato come una stella nel suo mondo. Aveva infatti scoperto in Poincaré il vero erede intellettuale di Riemann. Ironia della sorte: quell'erede non sapeva quasi nulla del lavoro di Riemann, e decisamente non era un tedesco.

Henri Poincaré

Al contrario di Riemann, Poincaré apparteneva a una famiglia benestante e affermata. Henri nacque nella casa di suo nonno,[10] un albergo riconvertito situato nel centro della storica città francese di Nancy. La casa si sviluppava su quattro piani, con una scala centrale e un cortile centrale. Si trovava a un isolato di distanza dalla Porte de la Craffe, un monumentale arco trecentesco attraverso il quale la nobiltà locale — i duchi di Lorena — passavano prima di ricevere l'omaggio alle loro signorie. Dall'altra parte della strada rispetto alla casa di Poincaré c'era la chiesa dove erano sepolti i duchi. Proseguendo lungo la strada per qualche isolato, a sinistra c'era Place Stanislas, la bella piazza

barocca commissionata da Stanislao Leszczyński, il deposto re polacco patrigno del re francese Luigi XV. Il padre di Poincaré, Léon, era un medico che insegnava presso la facoltà di medicina dell'Università di Nancy. Il fratello di Léon, Antoni, ricoprì una serie di incarichi di prestigio nell'amministrazione pubblica (fra le altre cose, fu responsabile delle ferrovie nella regione di Parigi e del sistema idrico nelle campagne francesi). I figli di Antoni — primi cugini di Poincaré — avrebbero ottenuto incarichi ancora più alti: Raymond Poincaré sarebbe diventato presidente della Repubblica francese,[11] e suo fratello Lucien direttore di tutte le scuole secondarie, poi di quelle post-secondarie e infine vicerettore dell'Università di Parigi.

Pur appartenendo alla ricca borghesia, Poincaré non era al riparo dai comuni pericoli di quell'epoca. All'età di cinque anni fu colpito dalla difterite e per nove mesi non fu in grado né di parlare né di camminare. In seguito la sua salute rimase cagionevole, cosa che potrebbe spiegare la lieve difficoltà che si percepisce nel rapporto fra Poincaré e suo padre, fisicamente molto vigoroso. La madre impartì a lui e a sua sorella Aline le prime basi della loro istruzione, un'esperienza che non può che essere descritta come idilliaca. La famiglia andava in gita due volte alla settimana assieme a gruppi numerosi di persone, fino a 20, e Poincaré ha avuto in tal modo occasione di entrare in contatto con molti adulti intelligenti e riflessivi. La vacanza con la famiglia a Francoforte, l'esposizione mondiale di Parigi, le Alpi e Londra entrarono a far parte della sua infanzia, così come i lunghi soggiorni estivi e pasquali presso la tenuta dei nonni materni ad Annecy, vacanze che Aline ricorda fra le esperienze più felici della loro fanciullezza. Gaston Darboux (che tenne l'elogio funebre di Poincaré all'Accademia francese delle scienze) racconta dei giochi di fantasia che i due fratelli facevano ad Annecy, impegnandosi a elaborare una costituzione per uno Stato immaginario.

Stando alle varie testimonianze, sembra che Poincaré, con la sua testa fra le nuvole e la sua gentilezza fosse una continua fonte di stupore per i suoi insegnanti e i suoi compagni di classe. Era ambidestro, molto miope, e la sua coordinazione occhio-mano era a dir poco problematica (presumibilmente a causa della malattia che gli aveva causato una temporanea paralisi da piccolo). Tuttavia, fatta eccezione per il disegno, la scuola era per lui una passeggiata ed eccelleva in ogni materia. Uno dei suoi primi insegnanti disse a sua madre che sarebbe diventato un grande matematico, scrivendo per la precisione che era un «prodigio in matematica». Sua sorella racconta che stava spesso sepolto fra i libri, ma che non sembrava che stesse lavorando. Stando ai ricordi di Aline, sua madre lo proteggeva dalle distrazioni della vita quotidiana. Quando arrivava a casa da scuola, aveva già completato mentalmente i compiti durante il tragitto. Anni dopo, i suoi compagni di classe avrebbero ricordato un'immagine di Poincaré mentre tirava fuori dalla tasca un foglio di carta incredibilmente spiegazzato su cui c'erano i suoi compiti. Sembrava che non prendesse mai appunti, e spesso dava l'impressione di essere distante, perduto tra i suoi pensieri. Aveva una sbalorditiva memoria fotografica: era in grado di ricordare con facilità la pagina e il punto esatto di frasi che aveva letto anni prima.

Poincaré era un individuo calmo e d'indole mite. «Era molto equilibrato. Non mostrava mai nessun segno di rabbia, di turbamento emotivo, di passione. I suoi sentimenti più profondi erano quelli che stava più attento a nascondere»[12] scrisse sua sorella. «Nei suoi giudizi sugli altri» prosegue «evitava ogni esagerazione. Si rifiutava di dire che qualcuno fosse molto buono o molto cattivo, poiché non credeva negli assoluti, particolarmente in campo morale.»[13]

La guerra franco-prussiana giocò un ruolo decisivo negli ultimi anni dell'adolescenza di Poincaré. A solo un'ottantina di chilometri dall'attuale confine tedesco, la città di Nancy si trovò nel cuore degli scontri. Darboux, un grande geometra che fu a capo dell'Accademia francese delle scienze, descrive la reazione di orrore di Poincaré di fronte alla distruzione della tenuta della famiglia di sua madre nelle campagne di Nancy, e cita un passo di un amico di famiglia che raccontava come il giovane aveva aiutato suo padre a prendersi cura dei feriti.[14] Nancy cadde in mano ai prussiani e rimase sotto occupazione dal 1870 al 1873, anni durante i quali un alto funzionario dell'amministrazione tedesca prese alloggio a casa di Poincaré. Fu in questo periodo che quest'ultimo imparò il tedesco.[15]

Dopo la guerra, Nancy ritornò in mano ai francesi. La sua città sorella, il centro industriale di Metz (a una cinquantina di chilometri a nord, sulla Mosella), rimase sotto il controllo tedesco fin

dopo la Prima guerra mondiale e divenne parte della regione amministrativa tedesca dell'Alsazia-Lorena. Nancy, venuta a trovarsi sulla frontiera, fiorì e si sviluppò in una vivace cittadina di confine piena di artisti e di profughi in fuga dall'Alsazia e dalla politica di germanizzazione. Città romana fra le più importanti della Francia orientale, la Nancy del tardo XIX secolo fu un faro della cultura e della civiltà francese. L'industria, le arti e la cultura prosperarono contribuendo a dar vita al movimento dell'Art Nouveau, che si diffuse verso ovest passando da Nancy a Parigi e da lì in tutta la Francia.

Una delle eredità durature del periodo napoleonico è il sistema francese delle *grandes écoles,* le scuole d'elite che preparano ancor oggi il grosso dei quadri dirigenziali dell'apparato tecnocratico e manageriale del Paese.[16] Le biografie dei matematici francesi spesso iniziano con la menzione dei notevoli risultati da loro ottenuti ai test di ingresso e il resoconto dei diversi esami e concorsi. Poincaré non fece eccezione. Ottenne il primo premio in diversi concorsi nazionali e i suoi punteggi furono tra i più alti fra i candidati all'École Polytechnique e all'École Normale Supérieure di Parigi, scuole particolarmente famose per la qualità dei loro corsi di matematica.

Poincaré entrò all'École Polytechnique nel 1873 e si laureò nel 1875, raggiungendo il secondo posto nella graduatoria (a causa dei suoi risultati leggermente inferiori alla media in educazione fisica e arte). Si iscrisse quindi all'École des Mines, la *grande école* dedicata alla più vecchia — e quindi la più prestigiosa — branca dell'ingegneria, quella mineraria. Subito dopo aver preso la laurea specialistica, si imbarcò in una breve ma distinta carriera come ingegnere minerario, durante la quale completò la sua tesi di dottorato sotto la guida di Charles Hermite.

Gli esaminatori di tesi di Poincaré non furono del tutto entusiasti del suo scritto. I commissari riconobbero la ricchezza e l'originalità dei risultati,[17] ma non furono soddisfatti del modo un po' sciatto in cui Poincaré aveva presentato alcuni di essi, in particolare verso la fine. Le dimostrazioni contenevano dei salti e i manoscritti mostravano segni di essere stati preparati in fretta. Il presidente della commissione esaminatrice, Darboux, spinse Poincaré a sviluppare ulteriormente alcune delle sue idee e a elaborarle in modo più compiuto. Poincaré sistemò con diligenza tutti gli errori segnalati dalla commissione, ma si oppose alla richiesta di sviluppare ulteriormente le sue idee dicendo che aveva molte altre cose a cui pensare. Come ammise con ammirazione Darboux, le aveva veramente.

Una volta conseguito il dottorato, nel dicembre 1879 Poincaré ottenne un incarico di assistente presso l'Università di Caen. In Francia, la gavetta nelle province costituiva il tipico inizio di una carriera accademica. La cittadina di Caen è il capoluogo del dipartimento amministrativo di Calvados, in Normandia. Nota per le sue costruzioni normanne — in particolare per l'imponente fortezza di Guglielmo il Conquistatore, risalente al 1060 —, Caen è a solo una quindicina di chilometri dalle spiagge della Normandia. L'università vi venne fondata nel 1432 da re Enrico IV d'Inghilterra e sarebbe stata interamente distrutta in un bombardamento aereo durante lo sbarco alleato in Normandia, nel 1944.[18]

L'Accademia francese delle scienze aveva annunciato nel 1878 un concorso in cui veniva messo in palio un premio per chi fosse riuscito a «perfezionare in qualche punto rilevante la teoria delle equazioni differenziali lineari a una sola variabile indipendente». Poincaré era rimasto molto affascinato da alcune opere di Lazarus Fuchs, un coautore del suo relatore di tesi, su una classe di funzioni a una variabile complessa che emergono in connessione con soluzioni di equazioni differenziali. Egli iniziò quindi a chiedersi se funzioni analoghe esistessero anche in altri contesti. Alla fine del mese di maggio del 1880, Poincaré inviò il proprio saggio in risposta al bando di concorso. Poco tempo dopo, comprese che quelle funzioni sono collegate alla geometria non-euclidea.

«Da quindici giorni» avrebbe in seguito raccontato «mi sforzavo di dimostrare che non poteva esistere nessuna funzione analoga a quelle che ho successivamente chiamato funzioni fuchsiane. A quel tempo ero molto ignorante in materia.»[19] Poincaré prosegue descrivendo come, dopo una notte insonne (aveva bevuto a tarda ora una tazza di caffè nero, contrariamente alle sue abitudini, e non riusciva ad addormentarsi), scoprì con stupore l'esistenza di una grande classe di funzioni di questo tipo e trovò quindi un modo adatto per rappresentarle. Fu una conquista di prim'ordine. Tuttavia,

ben presto avrebbe avuto una sorpresa ancora più grande.

> Partii allora da Caen, dove abitavo in quel periodo, per partecipare a un'escursione geologica organizzata dall'École des Mines. Le peripezie del viaggio mi fecero dimenticare i miei lavori matematici; giunti a Coutances, salimmo in omnibus per non ricordo più quale gita. Nel momento stesso in cui misi il piede sul predellino, mi venne tutto d'un tratto l'idea — senza che nulla nei miei precedenti pensieri, almeno in apparenza, mi ci avesse predisposto — che le trasformazioni che avevo usato per definire le funzioni fuchsiane erano identiche a quelle della geometria non-euclidea. Non feci la verifica (non ne avrei avuto neanche il tempo, dato che, appena seduto in omnibus, ripresi la conversazione che avevo iniziato prima), ma ne fui subito assolutamente certo. Una volta ritornato a Caen, verificai comunque il risultato a mente riposata, per mettermi la coscienza a posto.[20]

Questa conclusione era ancor più sensazionale. Ma non era tutto. Poincaré rivolse la propria attenzione ad alcuni problemi di aritmetica, senza sospettare che avessero qualche collegamento con le sue ricerche precedenti.

> Stanco dei miei insuccessi, andai a trascorrere qualche giorno in riva al mare e mi misi a pensare a tutt'altro. Un giorno, mentre passeggiavo lungo la scogliera, mi venne improvvisamente l'idea — anche questa volta con le medesime caratteristiche di brevità, subitaneità e certezza immediata — che le trasformazioni aritmetiche delle forme quadratiche ternarie indefinite erano identiche a quelle della geometria non-euclidea.[21]

Tornato a Caen, Poincaré comprese che ciò implicava l'esistenza di un'intera altra classe di funzioni fuchsiane. Si era imbattuto in un paese delle meraviglie matematiche. Poincaré mandò all'Accademia delle scienze di Parigi tre supplementi al suo saggio, evidenziando con cura la connessione con la geometria non-euclidea.[22] Verso la fine del 1880, venne nominato una prima volta per la candidatura a membro nell'Accademia delle scienze e, nel marzo 1881, l'Accademia stessa gli conferì un'altissima menzione d'onore, ma non il primo premio.

Grazie alla sua scoperta, Poincaré potè fare rapidi progressi; annunciò i suoi risultati in due brevi articoli apparsi nel febbraio 1881 e in un terzo pubblicato il 4 aprile. Questi scritti non sfuggirono a Felix Klein.[23] *«Sehr Geehrter Herr!»* (l'inimitabile espressione formale tedesca per «Caro signor»), iniziava la lettera del professore a Poincaré, datata 12 giugno 1881:

> Le vostre tre note pubblicate in «Comptes Rendus» di cui sono venuto a sapere di sfuggita soltanto ieri, sono così strettamente legate alle riflessioni e agli sforzi che mi hanno tenuto occupato in questi ultimi anni che ho sentito il dovere di scrivervi. Vorrei innanzitutto richiamarmi a un mio lavoro leggermente diverso, sulle funzioni ellittiche, che ho pubblicato nei volumi XIV, XV e XVII dei «Mathematische Annalen». Le funzioni modulari ellittiche, naturalmente, sono solo un caso particolare della relazione di dipendenza da voi considerata, ma un confronto più attento vi mostrerà che molto probabilmente possedevo già i princìpi generali.[24]

Anche se aveva solo cinque anni in più di Poincaré, Klein era un professore ordinario affermato, con un enorme prestigio. Klein sapeva che Poincaré avrebbe riconosciuto il suo nome. Documentò con attenzione dove e quando erano apparsi i suoi scritti, rendendo chiaro che aveva raggiunto altri risultati che non aveva ancora pubblicato ma di cui aveva già parlato con altre persone. A parte la rivendicazione di priorità, Klein espresse la speranza che questa sua lettera potesse essere la prima di una lunga serie, fece alcuni nomi di matematici, sottolineò maliziosamente che fino al semestre successivo non avrebbe avuto molto tempo per pensare a questi problemi e, scusandosi, spiegò che il suo francese non era buono come avrebbe dovuto essere.

Poincaré non rimase per nulla intimidito. «Monsieur» replicò praticamente subito (il 15 giugno):

> La vostra lettera mi mostra che avete scorto prima di me alcuni dei risultati che io ho ottenuto nella teoria delle funzioni fuchsiane. Non ne sono affatto sorpreso, sapendo quanto siete versato nella geometria non-euclidea, che è la vera e propria chiave del problema di cui ci stiamo occupando.

La scelta, da parte di Poincaré, di usare i verbi «scorgere» in riferimento ai risultati di Klein e «ottenere» in riferimento ai propri è qualcosa di sottile, ma nient'affatto accidentale.[25] Consapevolmente o no, Poincaré si era imbattuto in una cosa che Klein più di tutti avrebbe dovuto scoprire, cosa che, nella pratica, non era stato in grado di fare. Klein non aveva colto il collegamento con la geometria non-euclidea. Il problema è quello «di cui ci stiamo occupando». Poincaré era intenzionato a non cedere il campo a Klein. Affermò che avrebbe naturalmente riconosciuto la priorità di Klein. Quindi venne una sottolineatura arguta. «Avete parlato delle "funzioni modulari ellittiche".[26] Perché il plurale? Se la funzione modulare è il quadrato del modulo espresso come una funzione dei periodi, ce n'è soltanto una. L'espressione "funzione modulare" deve significare qualcos'altro.»

Naturalmente era così, significava qualcos'altro, ma il tedesco di Poincaré era abbastanza buono da fargli notare il plurale e la sua matematica era solida. Seguirono altre quattro domande, tutte molto impegnative. «Che cosa intendete con funzioni algebriche rappresentabili attraverso funzioni modulari? Inoltre, che cos'è la "Teoria del poligono fondamentale"?» Poincaré non aveva paura di fare domande e di mettere in discussione il gergo tecnico: «Avete trovato tutti i poligoni circolari[27] che danno origine a un gruppo discontinuo? Avete mostrato l'esistenza di funzioni che corrispondono a ciascun gruppo discontinuo?». Queste, naturalmente, erano il cuore del problema. Erano queste ultime le funzioni che Poincaré non si aspettava esistessero e che, invece, aveva scoperto dopo la tazza di caffè nero. Egli concluse la sua lettera dicendo che aveva passato la nota di Klein a Émile Picard — uno dei grandi matematici francesi menzionati da Klein stesso — e auspicando la prosecuzione dei loro contatti. Infine Poincaré termina con un appunto sottilmente crudele: «Mi sono preso la libertà di scrivervi in francese perché mi avete detto che conoscete questa lingua». Non esattamente quello che aveva detto Klein, ma una ragionevole interpretazione delle sue parole.

Ebbe così inizio una corrispondenza che si sarebbe rivelata affascinante e complessa, oltre che ironica. Le lettere passarono attraverso ogni sorta di punto di contrasto intellettuale ed emotivo. Visto dal di fuori della Germania, Klein rappresentava l'epitome dell'élite culturale tedesca. Sicuro di sé, aitante, altamente preparato e sposato alla nipote di Hegel, godeva di tutti i privilegi di un professore universitario tedesco seguito da una schiera di studenti devoti. All'interno della Germania, tuttavia, c'era una spaccatura fra la scuola dell'analisi, simboleggiata dal grande e influente matematico tedesco Karl Weierstrass, e i sostenitori di metodi più geometrici che si rifacevano a Riemann. Klein (e i suoi studenti con lui) si era identificato con quest'ultima corrente, contribuendo in tal modo ad allargare la spaccatura — l'entusiasmo di Klein, infatti, apparteneva a quel genere di passione che, nella stessa misura in cui unisce chi la condivide, genera divisione rispetto agli altri. Questa separazione produsse conseguenze anche al di fuori della Germania. In Francia il supervisore di Poincaré, Charles Hermite, ammirava moltissimo Weierstrass, mentre detestava tutto ciò che avesse qualcosa a che fare con la geometria e non si diede mai la pena di imparare alcuni dei metodi di Riemann. Di conseguenza, la preparazione di Poincaré presentava delle lacune. Fuchs, che prima della guerra aveva svolto alcuni importanti lavori assieme a Hermite, apparteneva decisamente al campo di Weierstrass ed era piuttosto retrogrado.

Un lato ironico della vicenda, quindi, è che Poincaré, che non conosceva praticamente nulla di ciò che aveva fatto Riemann, aveva iniziato a ricreare e riscoprire alcuni dei risultati di Riemann. Tuttavia, egli diede alle sue nuove funzioni il nome di Fuchs, allineandosi apparentemente con la visione di Weierstrass. In modo dapprima cortese, poi con sempre maggior insistenza, Klein suggerì a Poincaré di ribattezzare le funzioni fuchsiane così da riconoscere in *esse* i contributi di Karl Hermann Schwartz e altri. Ma Poincaré si rifiutò di farlo. Una seconda ironia è data dal fatto che Klein aveva studiato con attenzione l'opera di Riemann e i suoi successivi sviluppi. La sorprendente ignoranza di Poincaré in materia diede a Klein un enorme vantaggio in partenza. Ma Poincaré, che era estremamente dotato, imparava e padroneggiava immediatamente tutto ciò a cui Klein faceva cenno e il loro scambio di lettere lo indirizzò verso l'opera di Riemann.

Altro motivo di lieve attrito tra i due matematici era costituito dallo spirito patriottico. Le relazioni tra Francia e Germania erano piuttosto *tese.* Poincaré aveva visto direttamente

l'aggressione tedesca e rappresentava la quintessenza della nazionalità francese. Il motto *«Non inultus premor»,* che aveva apposto sul suo saggio per il concorso organizzato dall'Accademia francese delle scienze, era quello della sua città natale, Nancy, uno slogan battagliero che si potrebbe grossomodo tradurre come «Nessun torto rimarrà impunito!»[28] e che, dopo l'umiliazione francese del 1870, aveva acquisito una carica di animosità ancora più profonda. Klein, da parte sua, si era arruolato nell'esercito tedesco e aveva prestato servizio durante la guerra. Pur non essendo il bigotto sciovinista che traspare in alcune sue descrizioni, egli aveva comunque un debole per quei miti sui caratteri intellettuali legati alla razza e alla nazionalità che avrebbero sfigurato la Germania del XX secolo. Anni dopo avrebbe parlato in termini quasi mistici dell'atmosfera che si respirava a Gottinga,[29] e credeva che il pensiero di Riemann rappresentasse il distillato del genio scientifico tedesco. E tuttavia, trovò in Poincaré un giovane francese che era più riemanniano dello stesso Riemann.

Lo scambio di lettere proseguì per più di un anno. Le missive sono in superficie cortesi, ma molto tese. Per entrambi la posta in gioco era alta. Klein chiese a Poincaré di mandare un breve sunto dei risultati da lui raggiunti ai «Mathematische Annalen» (che, curati dallo stesso Klein, erano allora la più importante rivista matematica tedesca). Poincaré accettò. Ciò fece precipitare il loro disaccordo su nomi e attribuzioni. Klein aggiunse all'articolo di Poincaré una nota in cui prendeva le distanze dalla scelta degli aggettivi «fuchsiano» e «kleiniano» (quest'ultimo era la risposta, maliziosa, di Poincaré alle precedenti proteste di Klein riguardo all'uso di «fuchsiano»). Poincaré insistette che gli venisse concesso di giustificare la sua scelta dei nomi. Klein inserì cortesemente un estratto di una lettera che il francese aveva preparato a questo scopo, ma scrisse di non esserne affatto contento.

La risposta di Poincaré, datata 4 aprile 1882, ribolle di ostilità antiprussiana a stento repressa:

> Ho appena ricevuto la vostra lettera e mi affretto a rispondervi. Mi dite che è vostro desiderio porre fine a un dibattito che risulta sterile per la scienza, e io non posso che felicitarmi per la vostra determinazione. So che tale determinazione non può esservi costata molto, dato che con la vostra nota aggiunta alla mia ultima comunicazione siete comunque voi ad avere l'ultima parola. Per quanto riguarda me, non sono stato io ad accendere la discussione — in cui sono entrato semplicemente per dichiarare una volta per tutte la mia opinione su ciò che mi è impossibile tacere — e non sarò certo io a volerla prolungare. Non dirò più nulla in proposito a meno di non esserne costretto; d'altronde, non vedo che cosa mi potrebbe costringere a farlo [...]. Spero, d'altronde, che questa giostra cavalleresca con armi spuntate nella quale ci siamo scontrati intorno a un nome non danneggerà la nostra relazione. In ogni caso, non nutrendo il benché minimo risentimento per il vostro attacco, spero che neppure voi vi siate risentito perché io mi sono difeso. Del resto, sarebbe ridicolo se continuassimo a litigare su un nome; *Name ist Schall und Ranch,* e per quel che mi riguarda non c'è nessun problema: voi fate quel che volete, io, dal mio canto, mi regolerò come meglio credo.[30]

Il problema è che non si era trattato affatto di una giostra cavalleresca con armi spuntate, ma di una zuffa da strada con coltelli a serramanico, nel maneggiare i quali Poincaré si era dimostrato particolarmente abile. In questa lettera, Poincaré si burla della determinazione di Klein a chiudere il dibattito ricorrendo a un'espressione («non può esservi costata molto») che richiamava le riparazioni di guerra imposte dalla Germania alla Francia.[31] Inoltre si serve astutamente di termini militari, che non potevano che richiamare i fatti del 1870, e cita — dal *Faust* di Goethe — parte della famosa risposta spazientita di Faust all'innocente Margherita,[32] che in quel contesto sembra inequivocabilmente una presa in giro; conclude infine la lettera con un improvviso cambiamento di tono, passando al linguaggio dei ragazzini che litigano a scuola («voi fate quel che volete, io [...] mi regolerò come meglio credo»). La corrispondenza proseguì fino al mese di settembre del 1882, quando si interruppe dopo che sia Klein sia Poincaré avevano preso individualmente accordi per pubblicare le esposizioni dettagliate delle loro rispettive scoperte.[33]

La rivalità aveva spinto entrambi gli uomini a raddoppiare i loro sforzi. Anche se i benefici sul piano scientifico sono stati incalcolabili, i costi personali furono pesanti. Né Klein né Poincaré avevano bisogno di stimoli aggiuntivi per lavorare di più. Stando a un racconto folcloristico, uno

studente specializzando disse a Klein che lavorando fino a tarda sera sui problemi di matematica avrebbe finito per perdere il sonno, e Klein borbottò che per quello c'era il cloralio idrato. Il superlavoro è un rischio professionale per i matematici: i problemi che li tengono occupati sono straordinariamente interessanti, ed è difficile non diventarne ossessionati.

Klein fu quello che risentì maggiormente delle conseguenze dello stress e della fatica. Nell'autunno del 1882 ebbe un crollo totale ed entrò in una grave depressione che si protrasse fino al 1884. «Il mio lavoro realmente produttivo nel campo della matematica teorica si è concluso nel 1882» scrisse in seguito.[34] Proseguì sottolineando, con una certa amarezza, che aveva lasciato il campo a Poincaré. Klein avrebbe ancora dato un grosso contributo alla matematica, ma solo come conferenziere e insegnante. Non sarebbe mai più tornato in prima linea sul fronte della ricerca. Il libro da lui promesso nella sua ultima lettera a Poincaré apparve solo più di 15 anni dopo. Poincaré, dal canto suo, pubblicò un'esposizione completa dei propri risultati in cinque articoli apparsi su «Acta Mathematica», una nuova rivista fondata dal matematico svedese Gustav Mittag-Leffler. Ma anche Poincaré dovette pagare un prezzo. Nell'estate del 1884 gli fu diagnosticata una forma di esaurimento per l'eccessivo lavoro e gli venne ordinato di mettersi a riposo per un mese.

Alla fine, entrambi caddero in piedi, anche se le loro carriere presero rapidamente strade diverse. Klein ricevette l'offerta di una cattedra a Gottinga e applicò il suo formidabile talento all'insegnamento, alla divulgazione e ai compiti amministrativi. Fece di Gottinga un centro di matematica e fisica senza rivali in tutto il mondo. Nel frattempo Poincaré, che si era sposato[35] e, nell'ottobre 1881, aveva ottenuto un incarico (anche se solo di secondaria importanza)[36] a Parigi, era giunto ad apprezzare il lavoro di Riemann e aveva ormai penetrato (e superato) gran parte del lavoro sia della scuola di Klein, sia di quella di Weierstrass. Il primo dei grandi articoli sugli «Acta» era apparso nel dicembre 1882 e il quinto — l'ultimo — quasi due anni dopo. Gli articoli avevano dato prestigio alla rivista e reso famoso Poincaré. Nel 1884, egli iniziò a percorrere una linea di ricerca interamente nuova che, nel giro di cinque anni, avrebbe rivoluzionato la fisica matematica. Intanto, nel 1885, ricevette un'agognata cattedra (in fisica) presso la facoltà delle scienze di Parigi. Nel 1887, l'anno in cui nacque il suo primo figlio, venne eletto membro dell'Accademia delle scienze alla giovanissima età di trentadue anni, una cosa quasi inconcepibile.[37]

10
Gli articoli topologici di Poincaré

L'importanza intellettuale del lavoro svolto da Poincaré e Klein non sfuggì a nessuno. Essi avevano dischiuso un'area interamente nuova della matematica. Da allora in poi la geometria non-euclidea avrebbe fatto stabilmente parte della matematica ufficiale. Inoltre (ed era la cosa più interessante), anche se ci sarebbero voluti altri due decenni per svilupparne pienamente i dettagli, il loro lavoro avrebbe condotto a scoprire una connessione incredibilmente profonda e del tutto inaspettata fra la topologia e la geometria in due dimensioni. Il teorema che esprime questi risultati è una delle conquiste più luminose della matematica e del pensiero umano in generale. La congettura di Poincaré apparteneva ancora al futuro — sarebbe stata formulata vent'anni dopo — e non sembrava avere alcun rapporto con questo risultato. Ma l'allora inimmaginabile analogo in tre dimensioni di quel teorema avrebbe fatalmente rivelato un legame inestricabile con la congettura di Poincaré.

Per riuscire a comprendere ciò che Poincaré e Klein avevano scoperto, dobbiamo ricordare che uno dei più grandi risultati ottenuti nel XIX secolo fu la classificazione di tutte le superfici topologicamente differenti. Ma a che punto si era con la classificazione delle superfici in base alla geometria? Di primo acchito, sembrerebbe un'operazione disperata. Ci sono troppe possibilità. Le sfere di raggio differente non sono isometriche, così come non lo sono quelle che presentano cavità e convessità. Tuttavia, il lavoro di Poincaré e Klein implicava che fosse possibile assegnare a qualunque superficie una geometria in cui tale superficie aveva curvatura costante (e da ciò seguiva facilmente che questa geometria doveva essere unica: se una superficie aveva una geometria piatta, non era possibile sovrapporle una geometria sferica).

La geometria naturale di una superficie

Finché si parla di una sfera, ciò non è molto sorprendente. Noi sappiamo che una sfera perfettamente rotonda è omeomorfa a qualunque sfera, e quindi che la sfera ha una geometria sferica. Ma per quanto riguarda un toro? Qualunque toro nel 3-spazio ha regioni con curvatura positiva e regioni con curvatura negativa. Lungo la parte esterna del toro, i triangoli hanno una somma angolare maggiore di 180 gradi, dunque la curvatura è positiva. All'interno, invece, il toro è fatto a forma di sella e la somma angolare dei triangoli è minore di 180 gradi, cosi che la curvatura risulta negativa. Ora, pensiamo al toro come abbiamo fatto nel capitolo 2 (figura 1), immaginando però che esso sia la superficie ottenuta a partire da un quadrato congiungendo fra loro i lati opposti; in altre parole, pensiamo che ogni punto del margine inferiore venga a coincidere con il punto corrispondente (quello verticalmente sopra di esso) del margine superiore, e che ogni punto del margine sinistro venga a coincidere con il punto corrispondente del margine destro.

Seguiamo quindi le indicazioni di Riemann e specifichiamo una geometria sul toro, stabilendo che misureremo le lunghezze e gli angoli sul toro misurando le lunghezze e gli angoli corrispondenti sul quadrato.[1] Dobbiamo tener presente che quando qualcosa esce da uno dei lati del quadrato, rientra dal punto corrispondente sul lato opposto. Il risultato è quello di dire che i segmenti di retta sul toro sono segmenti di retta sul quadrato, con la clausola che questi ultimi segmenti potrebbero uscire da un margine e rientrare da quello opposto. Di fatto, i segmenti più brevi che congiungono un punto a un altro potrebbero essere proprio quelli che escono da un lato e rientrano dall'altro (figura 30).[2]

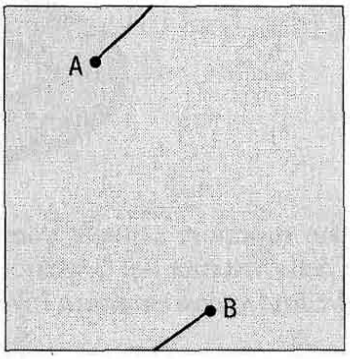


Figura 30: Segmenti di retta che congiungono due punti sul toro.

Ogni triangolo tracciato su questo toro ha una somma angolare pari a 180 gradi. Pertanto, esso è piatto e la sua geometria è euclidea (ma, a differenza del piano euclideo, esso ha un'area finita e ci sono delle linee rette di lunghezza finita). Per questa ragione, è chiamato «toro piatto».

Connettendo il lato superiore di un quadrato a quello inferiore, veniamo ad arrotolare il quadrato stesso trasformandolo in un cilindro. Questa operazione, che può essere compiuta senza difficoltà nel 3-spazio, non comporta una distorsione delle distanze, così che le rette (e i triangoli) tracciate sul quadrato rimangono rette anche sul cilindro. In particolare, dato che i suoi triangoli hanno la somma angolare pari a 180 gradi, il cilindro è piatto (figura 31).

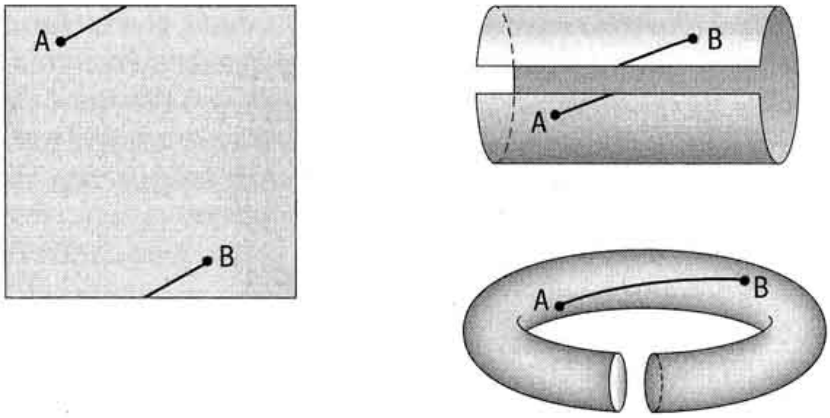


Figura 31 : Connettere il lato superiore e quello inferiore di un quadrato non comporta una distorsione delle distanze nel 3-spazio. Congiungere il margine destro e quello sinistro del cilindro così ottenuto invece sì.

Tuttavia, quando cerchiamo di connettere allo stesso modo il margine sinistro e quello destro nel 3-spazio, e tiriamo i cerchi ai margini del cilindro in modo da unirli, veniamo ad arrotolare il cilindro stesso distorcendo le distanze e introducendo quindi una curvatura. Nel passaggio dalla figura in alto a destra (nella figura 31) a quella in basso a destra, abbiamo alterato le distanze fra alcuni punti. Non c'è modo di ottenere un toro nel 3-spazio senza distorcere le distanze e senza quindi introdurre una curvatura. Tuttavia, il fatto che non possiamo costruirlo nel 3-spazio non significa che non esista. Esso esiste: abbiamo un insieme ben definito, abbiamo una distanza ben definita e non abbiamo bisogno di altro. Per un matematico, il toro piatto è più naturale di quelli costruiti nel 3-spazio. Dopotutto, il 3-spazio stesso è una costruzione matematica dal momento che non esiste al di fuori della matematica. Quando pensiamo a un esemplare di sfera, noi pensiamo a una sfera rotonda, senza nessuna variazione nella curvatura.

Al contrario di un toro regolare, un toro a due buchi ha una metrica con curvatura negativa costante. In altre parole, il suo stato più naturale e più simmetrico ha una geometria iperbolica. Il ragionamento che conduce a questa conclusione segue la stessa linea del precedente ragionamento

secondo cui la geometria naturale su un toro è quella euclidea (ossia piatta), ma è un po' più complicato. In primo luogo, osserviamo che il processo di tagliare un toro a due buchi in modo da poterlo dispiegare su un piano (si veda la figura 5 nel capitolo 3) ci mostra di fatto che è possibile considerare il toro a due buchi come un ottagono (ossia, un poligono con otto lati) con lati alternativamente identificati in coppie (figura 32).

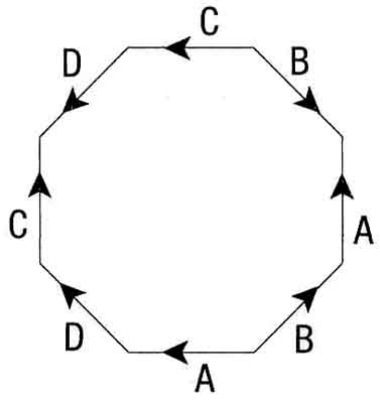


Figura 32: Congiungendo i punti corrispondenti dei lati contrassegnati dalla stessa lettera (nelle direzioni indicate dalle frecce), otteniamo un toro a due buchi. Tuttavia, dato che ognuno degli angoli misura più di 45 gradi, non è possibile disporli tutti attorno al loro punto comune a meno di non distorcere gli angoli stessi (e le distanze).

Ma non ci è possibile seguire lo stesso procedimento utilizzato per il toro e usare le lunghezze e gli angoli di un ottagono regolare (dicendo «regolare» si intende che tutti i suoi lati hanno la stessa lunghezza) per definire una geometria sul toro a due buchi. Questo perché, dopo aver unito tutti i punti corrispondenti, tutti gli otto vertici dell'ottagono si identificano in un unico punto e i suoi otto angoli si uniscono attorno a quel punto. Ma attorno a un punto ci sono 360 gradi (è la definizione di grado) e pertanto, se volessimo disporre perfettamente otto angoli attorno a un punto, ogni angolo dovrebbe misurare 45 gradi (cioè 360 diviso 8). Basta però guardare la figura 32 per rendersi subito conto che ognuno degli otto angoli di un ottagono regolare misura molto più di 45 gradi, così che non è possibile farli stare in modo appropriato attorno a un punto.[3]

Tuttavia, come ricorderemo, nella geometria iperbolica i triangoli hanno meno di 180 gradi, e quando aumentiamo la scala dei poligoni la loro somma angolare diventa più piccola. Viene così ad aprirsi una possibilità: forse, in una geometria iperbolica, potrebbe essere possibile costruire un ottagono regolare i cui angoli misurino 45 gradi. A questo punto, potremmo congiungere tutti i lati e gli angoli si disporrebbero perfettamente intorno al vertice comune. In altre parole, potremmo forse ritagliare da un tessuto iperbolico un ottagono regolare in cui ciascun angolo abbia 45 gradi — e potremmo quindi congiungere i lati corrispondenti così da ottenere un doppio toro perfettamente simmetrico. Ciò ci consentirebbe di assegnare le distanze in questo ottagono non-euclideo in modo da misurare le distanze sul doppio toro (anche in questo caso, come in quello del toro normale, la distanza più breve potrebbe essere quella che attraversa un margine e rientra da un altro). Con questa metrica, il toro a due buchi avrebbe una curvatura negativa costante (dato che tale è la curvatura del piano iperbolico). La regione attorno a ogni punto è isometrica alla regione attorno a ogni altro punto. C'è una perfetta simmetria.

L'intuizione necessaria per rendersi conto che la costruzione descritta qui sopra è possibile e significativa è esattamente quella che colse tutto d'un tratto Poincaré mentre saliva sull'omnibus a Coutances. Naturalmente, per sviluppare i dettagli di questa intuizione Poincaré aveva bisogno di un modo più analitico di pensare una geometria a curvatura costante rispetto a quello che abbiamo descritto per sommi capi nel capitolo 8 servendoci dell'esempio di una stoffa a tessitura uniforme. Poincaré aveva messo a punto diversi modi di pensare la geometria considerata da Lobačevskij immaginando una porzione del piano ordinario e definendo la distanza in modo differente rispetto

alla distanza euclidea, così che da un punto di vista euclideo le geodetiche (ossia, le linee rette) apparissero incurvate. Uno di questi modi è dato dal «modello del disco di Poincaré» del piano iperbolico. Prendiamo un disco — ossia, la regione racchiusa da un cerchio nel piano ordinario (escludendo la circonferenza stessa). Immaginiamo che le distanze siano definite in modo tale da diventare sempre più ampie man mano che ci avviciniamo al bordo, cosa che rende quel bordo infinitamente lontano. Questo modello sembrerebbe diverso da quello di una superficie costituita da una stoffa tessuta in modo tale che ogni cerchio contenga un'area maggiore di quella che racchiuderebbe nel piano euclideo. Di fatto, però, questi due modi di pensare il piano iperbolico sono equivalenti: in quest'ultimo, veniamo ad assumere il punto di vista di un essere che viva sulla superficie (ogni parte sembra identica, il piano si estende all'infinito); nell'altro, immaginiamo di assumere una prospettiva extradimensionale portandoci all'esterno della superficie e guardandola come un disco in cui le distanze crescono progressivamente man mano che ci si avvicina al bordo.

Nel modello del disco, emerge che possiamo definire la distanza sul disco stesso in modo da rispettare i seguenti requisiti: (1) le geodetiche sono linee rette che attraversano il centro del disco e archi circolari che incontrano il bordo circolare — il cerchio limite — formando angoli retti; (2) gli angoli fra le geodetiche che si intersecano coincidono con gli angoli euclidei; e (3) per ogni punto, e in qualsiasi direzione, passa una e una sola geodetica (figura 33). Tra parentesi, l'interno del cerchio unitario è omeomorfo al piano, qualunque siano le geometrie su ciascuno dei due. Il modello del disco è molto pratico ai fini del calcolo e, cosa altrettanto importante, esso ci mostra inoltre che possiamo parlare della geometria non-euclidea in termini euclidei.

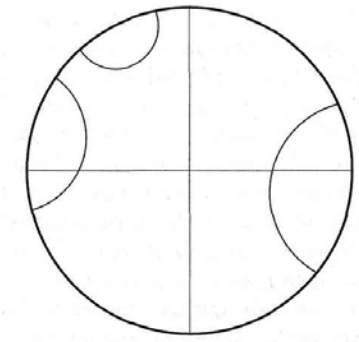


Figura 33: Il modello del disco di Poincaré con alcune geodetiche.

Con questo modello in mano, proviamo a trovare un ottagono regolare nel disco con la metrica usata da Poincaré. A sinistra, la figura 34 ci mostra un piccolo ottagono regolare ciascun angolo del quale risulta maggiore di 90 gradi. (I lati dell'ottagono sono segmenti di retta perché si trovano sugli archi che incontrano il cerchio limite formando angoli di 90 gradi: infatti questi, come ricorderemo, sono geodetiche, ossia linee rette.) A destra, vediamo invece un ottagono regolare in cui ogni angolo misura 0 gradi (i vertici sono posti all'infinito). Se espandiamo l'ottagono di sinistra fino a farlo diventare quello di destra, gli angoli si fanno via via più piccoli, raggiungendo infine 0 gradi. Accadrà che formando un qualche ottagono intermedio a un certo punto di questo processo di espansione, si otterrà una figura con angoli esattamente uguali a 45 gradi (proprio come se, viaggiando in macchina a una velocità superiore ai 90 chilometri l'ora, iniziamo a rallentare fino a fermarci: in un certo istante, prima di arrestarci, viaggeremo esattamente a 45 chilometri l'ora).
Questo ottagono, i cui angoli misurano tutti 45 gradi, è quello che stiamo cercando. Se congiungiamo i lati secondo le corrispondenze indicate nella figura 32, otteniamo un toro a due buchi. Il fatto di definire le distanze così come sono definite sull'ottagono dà alla figura ottenuta una geometria con curvatura negativa.

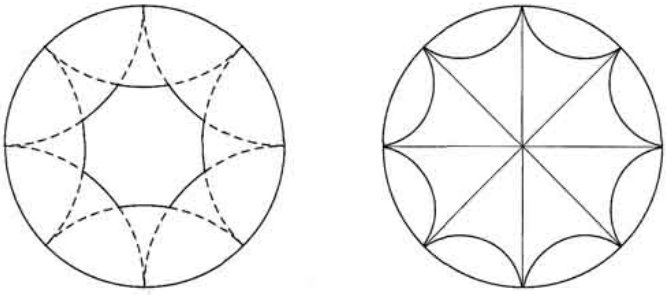


Figura 34: L'ottagono a sinistra ha angoli maggiori di 90 gradi. L'ottagono a destra ha angoli uguali a 0 gradi. Man mano che l'ottagono di sinistra si espande, i suoi angoli si rimpiccioliscono, diventando esattamente pari a 45 gradi in un qualche ottagono raggiunto prima di arrivare a quello sulla destra.

E per quanto riguarda il toro a tre buchi, o i tori con un qualsiasi numero di buchi? Seguendo un ragionamento simile a quello che abbiamo appena illustrato, possiamo dare a tutte queste figure delle metriche con curvatura negativa costante: esse sono quindi iperboliche. Pertanto, la geometria naturale della *maggior parte* delle superfici è iperbolica.[4]

I matematici trovarono incredibilmente bello il risultato secondo cui ogni superficie ha una geometria naturale. Appena quarant'anni prima avevano imparato che la topologia e la geometria erano cose profondamente differenti che non andavano confuse. Ora era emerso che, per quanto riguardava le superfici bidimensionali, la connessione fra queste due branche della matematica non avrebbe potuto essere più stretta. Il fatto che la maggior parte delle superfici fosse interessata dall'ancora un po' misteriosa geometria iperbolica non faceva altro che accrescere il senso di meraviglia.

Anche se non è propriamente possibile collocare un toro piatto nel 3-spazio euclideo (è invece del tutto possibile costruirne uno con curvatura variabile), con un paio d'anni di corsi matematici universitari alle spalle (un po' di algebra lineare e tre semestri di calcolo infinitesimale) è possibile dimostrare che il toro può essere messo nel 4-spazio euclideo, così che la metrica da esso ereditata è quella piatta.[5] Hilbert ha dimostrato che nessuna superficie può essere immersa completamente nel 3-spazio euclideo così da acquisire una metrica con curvatura negativa costante. In particolare, non è possibile far stare un toro a due buchi iperbolico nel 3-spazio euclideo. Ci si potrebbe chiedere se è possibile immergere ogni superficie, e più in generale ogni varietà con una metrica nel senso riemanniano, in un qualche spazio euclideo *n*-dimensionale così che la metrica (e quindi la distanza) sulla varietà sia la stessa che viene a ereditare dallo spazio ambiente euclideo. Questa domanda, nota come «problema dell'immersione di Riemann», rimase per molti anni senza risposta. Nel 1956, in un articolo straordinario che sembrava far saltar fuori risultati dal nulla, John Nash dimostrò che la risposta al problema generale dell'immersione era affermativa. Questo risultato lo rese famoso, ma poco tempo dopo egli cadde in una profonda psicosi. L'emergere di Nash dal baratro della schizofrenia e la sua vincita del premio Nobel per i suoi contributi alla scienza economica sono raccontati nel libro *A Beautiful Mind* (e in un film di *successo* che porta il medesimo titolo).[6]

I grandi articoli topologici

Poincaré aveva appreso della geometria non-euclidea da Eugenio Beltrami, che fu il primo a notare che la geometria iperbolica era una geometria a curvatura costante negativa. Feltrami evidenziò che una superficie, la cosiddetta pseudosfera, aveva tale geometria. Egli scoprì inoltre il modello del disco e comprese che la concezione di geometria sviluppata da Riemann offriva il collegamento che consentiva di unire i due concetti. Poincaré elaborò i dettagli di queste nozioni e scoprì ulteriori modelli. Inoltre, quest'ultimo non si fermò a due dimensioni, ma estese il proprio lavoro anche a geometrie di dimensioni superiori. Ecco le parole con cui descrive il proprio modello di spazio tridimensionale iperbolico:

> Supponiamo, per esempio, un mondo racchiuso in una grande sfera e soggetto alle seguenti leggi: la temperatura non è uniforme, ma è massima al centro e diminuisce gradualmente man mano che ci si allontana, per raggiungere lo zero assoluto in corrispondenza della sfera da cui il mondo è racchiuso. La legge di questa temperatura è la seguente: sia $\boldsymbol{R}$ il raggio della sfera limite e r la distanza del punto considerato dal centro; la temperatura assoluta sarà allora proporzionale a $\boldsymbol{R}^2$-r^2. Inoltre, supponiamo che in questo mondo tutti i corpi abbiano il medesimo coefficiente di dilatazione, così che la lunghezza di un regolo qualunque sia direttamente proporzionale alla sua temperatura assoluta. Infine, supponiamo che un corpo trasportato da un punto a un altro punto di temperatura differente entri immediatamente in equilibrio termico con il suo nuovo ambiente. In queste ipotesi non c'è nulla di contraddittorio o inconcepibile. Un oggetto in movimento diventerà allora progressivamente più piccolo mano a mano che si avvicinerà alla sfera limite. Osserviamo, innanzitutto, che anche se dal punto di vista della nostra geometria abituale questo mondo è finito, ai suoi abitanti esso apparirà infinito. Mano a mano che essi si avvicineranno alla sfera limite, essi diventeranno progressivamente più freddi e più piccoli. I loro passi saranno quindi sempre più corti, così che non potranno mai raggiungere la sfera limite. Se per noi la geometria è lo studio delle leggi secondo le quali si muovono i solidi invarianti, per questi esseri immaginari sarà lo studio delle leggi secondo le quali si muovono i solidi *deformati dalle differenze di temperatura* di cui abbiamo parlato [...]
> Facciamo ancora un'ulteriore ipotesi: supponiamo che la luce passi attraverso corpi dall'indice di rifrazione differente, e che quest'ultimo sia inversamente proporzionale a $\boldsymbol{R}^2$-r^2. È facile vedere che, sotto queste condizioni, i raggi luminosi non saranno più rettilinei, bensì circolari [...] Se essi [gli abitanti di questo mondo] costruiranno una geometria, tale geometria non sarà simile alla nostra, che è lo studio dei movimenti dei nostri solidi invariabili; essa sarà invece lo studio dei cambiamenti di posizione che gli abitanti di tale mondo avranno caratterizzato in questo modo, e che non sono altro che gli «spostamenti non-euclidei»; essa, cioè, *sarà la geometria non-euclidea.* Così quegli esseri simili a noi, educati in un mondo di questo genere, non condivideranno la nostra stessa geometria.[7]

Durante tutta la sua vita, Poincaré avrebbe sfiorato complessità concettuali la cui piena comprensione avrebbe poi richiesto quasi un secolo. Il primo di questi incontri riguardò il modello di 3-spazio iperbolico da lui presentato qui sopra. Egli scoprì che i comportamenti di differenti sottogruppi di moti sulla sfera all'infinito erano di gran lunga più complessi di tutto ciò che i matematici avevano in precedenza incontrato. Qualche anno dopo (nel 1887), il re di Norvegia e Svezia indisse un concorso per premiare la migliore opera sulla matematica del sistema solare. Poincaré presentò un saggio che vinse il premio e successivamente vi rintracciò un errore.[8] Egli aveva assunto che un certo tipo di comportamento infinitamente complicato non potesse verificarsi e poi scoprì che ciò era invece possibile. Aveva scoperto quello che oggi chiamiamo «comportamento caotico» — e, in seguito, avrebbe cercato un linguaggio e degli strumenti concettuali adatti a descrivere e a trattare ciò che aveva trovato. Oggi noi usiamo l'espressione «teoria del caos» per descrivere quei comportamenti a volte incredibilmente complessi che possono risultare dalle semplici leggi del moto o da semplici regole applicate ripetutamente.[9]

Come Riemann, Poincaré capì che le nozioni topologiche erano indispensabili per trovare un significato in ciò che stava imparando. Nel 1901, riflettendo in retrospettiva sul proprio lavoro, scrisse:

> Un metodo che ci permetta di conoscere i rapporti qualitativi in uno spazio di più di tre dimensioni potrebbe, in un certo modo, offrirci un servizio analogo a quello che ci viene offerto dalle figure. Un tale metodo può essere costituito soltanto dalla topologia di più di tre dimensioni. Ciononostante, questa branca della scienza è stata fino a oggi scarsamente coltivata. Dopo Riemann, [Enrico] Betti ha introdotto alcune nozioni fondamentali, ma nessuno lo ha poi seguito. Da parte mia, tutti i diversi sentieri su cui mi sono successivamente trovato impegnato mi hanno condotto alla topologia. Ho avuto bisogno delle nozioni di questa scienza per condurre i miei studi sulle curve definite da equazioni differenziali e per estenderli a equazioni differenziali di ordine superiore e, in particolare, al problema dei tre corpi. Ne ho avuto bisogno per studiare i periodi degli integrali multipli e per applicare questo studio alle espansioni perturbative. Infine, prevedo che la topologia offrirà un modo per affrontare un importante problema nel campo della teoria dei gruppi, lo studio dei sottogruppi finiti o discreti di un

dato gruppo continuo.[10]

Ciò che Poincaré non dice è che le nozioni di cui necessitava andavano molto oltre rispetto a quelle di cui aveva avuto bisogno Riemann, e superavano di gran lunga tutto ciò che era disponibile all'epoca. I contributi di Poincaré alla topologia furono sorprendenti, e anche oggi meritano ancora di essere letti. Annunci di ricerca a parte, essi apparvero in sei articoli pubblicati fra il 1895 e il 1904. Il primo fu pubblicato nel primo volume della rivista dell'École Polytechnique e gettò le fondamenta della disciplina in un articolo di ampio respiro e di oltre un centinaio di pagine.[11] E un tour de force impressionante. In esso Poincaré formula diverse definizioni di varietà: due sono molto comode per chi si occupa di analisi, un'altra è più adatta alla creazione di esempi in dimensioni inferiori e forma la base di ciò che chiamiamo topologia geometrica, e una quarta apre un collegamento con la teoria dei gruppi. Quest'ultima avrebbe acquistato una cruciale importanza per la topologia algebrica, un campo che Poincaré inventò praticamente da solo.

Poincaré discusse l'opera di Betti (menzionato anche nel passo che abbiamo citato sopra), che era un amico di Riemann e, probabilmente, l'unico che comprendesse completamente le sue idee in materia. Betti aveva ripreso l'idea riemanniana di tagliare una superficie lungo delle curve e l'aveva generalizzata nel concetto di tagliare una varietà di dimensione superiore lungo una varietà al suo interno. Poincaré, a sua volta, generalizzò il lavoro di Betti e i numeri che Betti aveva associato alle varietà. Egli definì una «sottovarietà» come una varietà all'interno di un'altra varietà (per esempio, una curva all'interno di una superficie, oppure una curva o una superficie all'interno di una varietà tridimensionale) e considerò due o più sottovarietà come correlate qualora costituissero il bordo comune di un'ulteriore sottovarietà. Poincaré reinterpretò i numeri presi in considerazione da Betti, oggi noti come i «numeri di Betti», introducendo equazioni tra sottovarietà di una varietà, chiamate «omologie su una varietà», che esprimevano la relazione di esser bordo all'interno della varietà. La collezione di tutte le omologie indipendenti di una data dimensione formava un gruppo chiamato «gruppo di omologia». I gruppi di omologia erano identici per le varietà che risultavano omeomorfe (inizialmente, però, questa era solo una semplice congettura), e una volta conosciuti i gruppi di omologia si potevano conoscere i numeri di Betti e altro.[12]

Poincaré associò a ogni varietà un oggetto algebrico del tutto nuovo che chiamò «gruppo fondamentale». Esso è invariante sotto omeomorfismo e ha radicalmente rivoluzionato il nostro modo di concepire le varietà. Un elemento di questo gruppo è un ciclo basato su un determinato punto nella varietà, ovvero un cammino che parte da quel punto e lì fa ritorno. Più formalmente, si tratta di una mappa continua di un intervallo in una varietà in cui entrambi i punti terminali vengono mappati sul medesimo punto. Due cammini sono considerati equivalenti se possono essere deformati l'uno nell'altro in modo continuo mantenendo fisso il punto di partenza (e quindi di arrivo). Possiamo moltiplicare due cammini procedendo prima attorno a uno e quindi attorno all'altro. L'insieme di cammini viene a formare un gruppo nel quale l'ordine in cui moltiplichiamo i cammini stessi è rilevante. Poincaré elaborò il modo in cui possiamo descrivere tali gruppi, e trovò uno schema in accordo col quale il gruppo può essere concepito come l'insieme di tutte le parole, o stringhe di caratteri, che possiamo creare con un dato insieme di lettere. L'equivalenza consiste nella possibilità di sostituire alcune stringhe con altre, e la moltiplicazione nella giustapposizione di due stringhe. Per ogni gruppo, le lettere che possiamo usare sono dette «generatori», e le regole di equivalenza sono chiamate «relazioni».

Poincaré era interessato in particolare alle varietà tridimensionali, che costituiscono i modelli delle potenziali forme che il nostro universo potrebbe avere. Riemann in precedenza aveva considerato la sfera tridimensionale, ora Poincaré voleva comprendere *tutte* le varietà tridimensionali.

Come esempi, Poincaré prese in considerazione la classe delle varietà tridimensionali ottenute congiungendo in diversi modi le facce opposte di un cubo. Ottenne il toro tridimensionale menzionato nel capitolo 4, oltre ad alcune altre varietà (insieme a un oggetto che dimostrò non essere una varietà). Egli mostrò in che modo è possibile determinare se gli oggetti ottenuti siano o meno delle varietà; studiò i loro gruppi fondamentali e mostrò che queste varietà possono essere

pensate come lo spazio che si ottiene identificando i punti nel 3-spazio che possono essere trasportati l'uno sull'altro in base a un particolare gruppo (si dice che la varietà è rappresentata come un «quoziente di un gruppo» che opera sul 3-spazio).

Poincaré si impegnò molto al fine di trovare un insieme di invarianti che distinguesse le differenti varietà. (In altre parole, dal momento che noi viviamo in un universo che è una varietà tridimensionale, come possiamo dire di che varietà si tratta?) Egli mostrò che non è sufficiente conoscere i numeri di Betti. Ottenne una famiglia infinita di varietà tridimensionali chiuse che non sono omeomorfe le une alle altre, e mostrò che è possibile avere varietà non-omeomorfe con gli stessi numeri di Betti (e, di fatto, con gli stessi numeri di Betti di una sfera). Fornì esempi di varietà con gruppi fondamentali finiti, ed evidenziò il risultato «apparentemente paradossale» (parole sue), sul quale sperava che il suo articolo facesse un po' di luce, secondo il quale una varietà può avere un gruppo fondamentale che è molto più complicato di un altro pur avendo un primo numero di Betti più piccolo. Egli proseguì scrivendo:

> Sarebbe interessante indagare sui seguenti problemi:
>
> 1. Dato un gruppo G definito da generatori e relazioni, esso può essere il gruppo fondamentale di una varietà di *n* dimensioni?
> 2. Come è possibile formare questa varietà?
> 3. Due varietà della medesima dimensione e con lo stesso gruppo fondamentale sono sempre omeomorfe?
>
> Queste domande richiedono di essere sviluppate in lunghi e difficili studi. In questa sede non le affronterò.[13]

Tra la fine del XIX e l'alba del XX secolo, altri cinque articoli — chiamati da Poincaré «complementi» — fecero seguito al grande saggio del 1895. Apparvero tutti su riviste di prim'ordine.[14] Il primo complemento, pubblicato nel 1899, chiarì la definizione dei numeri di Betti in risposta alle critiche mosse dal matematico danese Poul Heegaard. Heegaard aveva presentato un controesempio, mostrando che un teorema, oggi noto come «dualità di Poincaré» — in cui si asserisce che è possibile stabilire un collegamento tra i gruppi di omologia e coomologia di una varietà —, non poteva esser vero come affermato. Ne emerse che la definizione di Poincaré era diversa da quella adottata da Heegaard, e questa differenza era di cruciale importanza nel permettere la validità della dualità di Poincaré. Nel secondo complemento, apparso nel 1900, egli discusse i «coefficienti di torsione», che sono un'evoluzione dei numeri di Betti, ed estese a essi il suo teorema di dualità. Egli riconsiderò inoltre i propri esempi di varietà tridimensionali. Il terzo complemento studiava una particolare classe di superfici algebriche[15] che hanno due dimensioni complesse e, quindi, quattro dimensioni reali. Poincaré introdusse una serie di idee interamente nuove, guardando i cambiamenti nelle superfici bidimensionali all'interno della varietà mentre ci si muove attorno a «punti singolari». Il quarto articolo estese lo studio a superfici algebriche qualsiasi. Nel quinto e ultimo complemento, pubblicato nel 1904, Poincaré ritornò alle varietà tridimensionali, sfruttando l'apparato concettuale che aveva ormai in mano.

La varietà tridimensionale più semplice è la 3-sfera, ed è chiaro che la caratterizzazione di questo particolarissimo caso era sempre presente nei pensieri di Poincaré. Nel secondo complemento, egli ritenne di averla raggiunta. Iniziò richiamandosi ai suoi due articoli precedenti. «Ciononostante, la questione è ancora lontana dall'essere esaurita, e senza dubbio vi ritornerò diverse volte. Per questa volta, mi limiterò a certe considerazioni mirate a semplificare, chiarire e completare i risultati precedentemente acquisiti.»[16] Proseguì sviluppando e delineando con attenzione una procedura per calcolare i coefficienti di torsione e puntualizzando il teorema di dualità. Tuttavia, si spinse troppo oltre.

> Al fine di non allungare troppo questo lavoro, mi limito a enunciare il seguente teorema, la cui dimostrazione richiederebbe ulteriori sviluppi:

> *Ogni poliedro che abbia tutti i suoi numeri di Betti uguali a 1 e tutte le sue matrici T_q bilaterali è omeomorfo all'ipersfera.*[17]

E così inizia la tortuosa storia della congettura di Poincaré. Poincaré credeva di aver caratterizzato la sfera tridimensionale (o «ipersfera»). Il «teorema» da lui enunciato e scritto in corsivo, però, è falso. Egli se ne rese conto quattro anni più tardi e dedicò il suo quinto complemento alla costruzione di uno straordinario controesempio. L'articolo inizia con le seguenti parole:

> Ritorno ora nuovamente su questo stesso problema, nella convinzione che il successo può essere raggiunto solo attraverso ripetuti sforzi e che l'importanza della questione è tale da meritare questi sforzi. Questa volta mi limito allo studio di alcune varietà tridimensionali, ma i metodi di cui mi servo possono senza dubbio essere usati anche in un quadro più generale. Tra l'altro, mi soffermo a lungo sulle curve chiuse che è possibile tracciare su superfici chiuse nello spazio ordinario. Il risultato finale che ho in mente è il seguente. Nel secondo complemento, ho mostrato che per caratterizzare una varietà non è sufficiente conoscere i suoi numeri di Betti: determinati coefficienti, che ho chiamato coefficienti di torsione, giocano infatti un ruolo rilevante. Ci si potrebbe quindi chiedere se sia sufficiente la considerazione di tali coefficienti; in altri termini, se tutti i numeri di Betti e tutti i coefficienti di torsione di una varietà sono uguali a 1, quella varietà è omeomorfa a una sfera tridimensionale? Oppure, prima di poter rispondere affermativamente, è necessario studiare il gruppo fondamentale di questa varietà? Possiamo ora rispondere a queste domande; di fatto, ho costruito un esempio di una varietà con tutti i numeri di Betti e tutti i coefficienti di torsione uguali a 1, ma che non è omeomorfa alla 3-sfera.[18]

In altre parole, Poincaré ricorda al lettore che anche qualora uno conoscesse tutti i numeri di Betti del nostro universo, non potrebbe ancora dire di conoscere la sua forma. Ora, Poincaré si chiede se è possibile caratterizzare la varietà conoscendone i numeri di Betti e i coefficienti di torsione. Ma la risposta è anche in questo caso negativa. Egli ha infatti costruito un esempio di una varietà che ha gli stessi numeri di Betti e gli stessi coefficienti di torsione della sfera tridimensionale, ma che non è una sfera tridimensionale. Si tratta di un'affermazione sorprendente, dato che nel secondo complemento Poincaré aveva affermato che non pensava che questo fosse possibile.

Qual è l'esempio di Poincaré? Nel quinto complemento, egli descrive questo esempio nei termini di due tori solidi a due buchi incollati assieme in un modo particolare (un «diagramma di Heegaard»), e descrive con cura una coppia di cammini che non sono riducibili a un punto. Questa varietà è da allora indicata come «spazio dodecaedrico di Poincaré» (figura 35) e viene oggi solitamente descritta come la 3-varietà che otteniamo incollando assieme le facce opposte di un dodecaedro regolare dopo un decimo di giro in senso antiorario.[19] Come sappiamo, un dodecaedro regolare è il poliedro con 12 facce che possiamo costruire assemblando 12 pentagoni regolari della stessa grandezza cosi da ottenere una superficie chiusa che fa da bordo a un solido. È uno dei solidi platonici. I pitagorici ne sarebbero stati entusiasti.

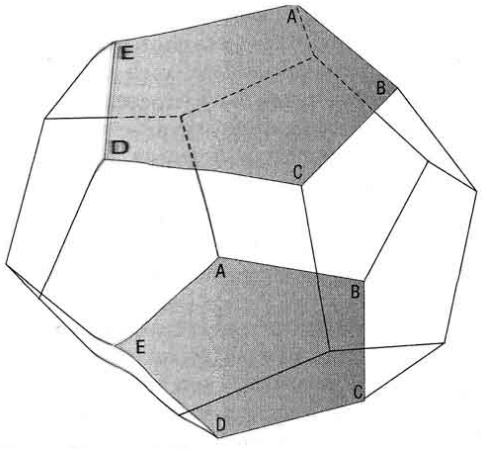


Figura 35: Lo spazio dodecaedrico di Poincaré si ottiene connettendo le facce opposte dopo un decimo di giro in senso antiorario.

Cinquantatré pagine dopo, Poincaré conclude il suo quinto complemento:

> Ci sono quindi due cicli sulla varietà che non sono equivalenti a un punto; pertanto, la varietà non può essere omeomorfa a una sfera.
> In altre parole […] [Riespone i risultati, spiegando che il gruppo fondamentale non è l'identità.] Rimane un'ulteriore questione da affrontare: è possibile che il gruppo fondamentale di una varietà sia l'identità, ma che la varietà in questione non sia omeomorfa alla sfera tridimensionale?
> In altre parole [...] [Egli spiega con cura, nei termini dell'esempio che ha costruito, quali condizioni si dovrebbero verificare per ottenere una tale varietà.] Ma questo problema ci porterebbe troppo lontano.[20]

L'«ulteriore questione da affrontare» — il problema «E possibile che il gruppo fondamentale di una varietà sia l'identità, ma che la varietà in questione non sia omeomorfa alla sfera tridimensionale?» — divenne nota quasi immediatamente come «congettura di Poincaré». Poincaré aveva definito il gruppo fondamentale di una varietà come l'insieme di cicli basati su un punto appartenente alla varietà dove due cicli sono considerati identici se possono essere deformati l'uno nell'altro. L'elemento identità è il ciclo che rimane in un singolo punto e non va da nessuna parte. Un ciclo è equivalente all'identità se e solo se può essere ridotto a un punto. Pertanto, dire che il gruppo fondamentale è l'identità significa dire che ogni ciclo nella varietà può essere ridotto a un punto. Nel suo primo articolo, Poincaré aveva notato che questo era quanto si verificava nel caso della sfera tridimensionale. Ora si stava chiedendo se fosse possibile avere anche un'altra varietà non omeomorfa alla sfera tridimensionale nella quale ogni ciclo fosse riducibile a un punto.

Si tratta di una domanda molto naturale e intrinsecamente interessante. È una delle prime cose che ci si chiede dopo aver incontrato le nozioni di varietà tridimensionale e gruppo fondamentale. Anche senza Poincaré, questa domanda avrebbe comunque affascinato i ricercatori. Ma Poincaré la considerava chiaramente di importanza centrale. Ritornò su di essa più e più volte. All'inizio, la fraintese prendendo un abbaglio. Si tratta del problema che «ci porterebbe troppo lontano», il problema al quale si riferiva in questa ultimissima frase di tutta la sua grande serie di scritti topologici. Il fatto che il più grande matematico allora vivente non fosse in grado di risolverlo era una garanzia della fama che attendeva chiunque ci fosse riuscito.

11
I grandi studiosi

All'alba del nuovo secolo, Parigi continuava a essere la capitale sociale e culturale del mondo. In essa vi era la maggior concentrazione di studiosi, tra i quali brillava proprio Henri Poincaré, ormai il più famoso matematico dell'epoca. Dal suo Olimpo, al vertice della piramide scientifica della Francia e del mondo intero, Poincaré era toccato da tutte le migliori idee in circolazione e dalle più importanti conquiste scientifiche di quel periodo. La sua opera spaziava in quasi tutto l'ambito della matematica e in numerose aree della fisica. Fra il 1901 e il 1912, Poincaré fu candidato per il premio Nobel non meno di quarantanove volte, più di qualunque altro scienziato vissuto prima o dopo di lui.[1]

Poincaré declinò sistematicamente ogni coinvolgimento o impegno politico, ma pare che non si sia mai rifiutato di svolgere dei servizi nel campo dell'amministrazione o della scienza. La sua modestia e il suo temperamento gentile offrivano un gradevole contrasto con le personalità più spigolose di alcuni dei suoi colleghi meno famosi. Faceva parte del comitato per l'Esposizione internazionale di Parigi (quella che ci diede la Torre Eiffel) e fu a capo del Bureau des Longitudes. Venne consultato sempre più frequentemente su ogni grande decisione inerente alle politiche per la scienza. La Francia dell'epoca era scossa dall'affare Dreyfus, e Poincaré divenne il membro di una commissione il cui compito era quello di vagliare la validità scientifica delle prove che erano state presentate al riguardo.

La fama di Poincaré si era allora già diffusa anche tra il pubblico dei profani. *La scienza e l'ipotesi,* il suo primo libro destinato a un pubblico generico di lettori colti, avrebbe venduto più di 16.000 copie solo in Francia nei primi dieci anni dalla sua pubblicazione, nel 1902. Il suo successo potrebbe essere all'origine della battuta nota a tutti i bambini delle scuole elementari francesi: *«Qu'est-ce un cercle? Ce n'est point carré»* («Che cos'è un cerchio? Non è un quadrato»), dove *«point carré»* si pronuncia come «Poincaré». Il libro sarebbe poi stato tradotto in 23 lingue. Una sua seconda opera divulgativa apparve tre anni dopo, e una terza nel 1908.[2] Questi volumi, scritti con il suo amabile stile di prosa, gli guadagnarono l'elezione all'Accademia francese, alla cattedra lasciata libera da Sully Prudhomme. Oggi come allora, essere eletti a uno dei 40 posti di quella accademia costituisce forse il più grande riconoscimento che può essere tributato a un intellettuale francese. Entrare a far parte sia dell'Accademia delle scienze sia dell'Accademia francese è un privilegio straordinariamente raro.[3]

I critici hanno cavillato dicendo che le opere di Poincaré contenevano delle trascuratezze e che lui peccava di negligenza. Nulla potrebbe essere più lontano dal vero. Ben lungi dall'essere insensibile alle critiche, Poincaré era solito ritornare sulle questioni quando lui stesso o altri trovavano degli errori nei suoi risultati. Era orgoglioso del proprio lavoro e non pubblicava mai uno scritto prima di avergli dato una forma che riteneva soddisfacente. Se è vero che rivedeva raramente ciò che aveva scritto, ciò non era però dovuto alla mancanza di cura, bensì alla mancanza di tempo. Con tutte quelle idee per la testa e con così poco tempo per esprimerle, una revisione era un lusso che non poteva permettersi.

C'è da stupirsi, piuttosto, che Poincaré abbia continuato a pubblicare così tanto, anche quando ormai non aveva più nessun bisogno di farsi una reputazione. Praticamente tutto ciò che dava alle stampe veniva esaminato con estrema attenzione. I matematici pendevano da ogni sua parola. Ogni volta che si interessava del lavoro di un collega, il credito accordato a quest'ultimo cresceva notevolmente. Per converso, anche trovare o sistemare un errore nelle argomentazioni di Poincaré era certo un buon modo per dare una spinta alla propria carriera. Se da un lato veniva riverito,

dall'altro era anche costantemente sotto tiro. La pressione a cui era sottoposto doveva essere tremenda, e non possiamo far altro che ammirare il coraggio da lui dimostrato nel continuare a esporvisi.

I suoi articoli su argomenti di topologia costituiscono un esempio significativo. I complementi ebbero origine con uno sbaglio che Poincaré aveva fatto nel suo saggio presentato per il problema della stabilità dell'universo. Come abbiamo visto, Poul Heegaard si fece un nome portando un controesempio alla prima versione del teorema di dualità. Il desiderio di Poincaré di correggere il proprio teorema lo condusse alla pubblicazione del primo complemento. Il quinto complemento, e con esso la famosa congettura, ebbe origine perché l'autore stesso aveva scoperto un errore nel proprio lavoro. Per quanto affascinante fosse il suo spazio dodecaedrico, in un mondo dove ogni sua parola veniva esaminata, una svista come questa doveva essere molto fastidiosa per Poincaré. Senza dubbio questi timori erano sempre presenti in lui quando scriveva, anche se non si soffermava esplicitamente a riflettervi sopra nelle sue opere. In *La valeur de la science,* egli scrisse queste toccanti parole sulla necessità di resistere fino in fondo:

> Lo scopo della nostra attività dovrebbe essere la ricerca della verità, che è il solo fine meritevole di tali sforzi [...] A volte, però, la verità ci spaventa [...] Noi sappiamo inoltre quanto essa sia spesso crudele, e ci chiediamo se l'illusione non sia soltanto più consolante, ma anche più fortificante, dato che è l'illusione a darci fiducia [...] E questa la ragione per cui molti di noi temono la verità; la considerano come un motivo di debolezza. E tuttavia, la verità non andrebbe temuta, perché essa sola è bella.
> Quando parlo qui della verità, intendo senza dubbio riferirmi in primo luogo alla verità scientifica; ma mi riferisco anche alla verità morale, di cui ciò che chiamiamo giustizia è soltanto un singolo aspetto. Potrebbe sembrare che, così facendo, io stia usando impropriamente le parole, che stia unendo sotto lo stesso nome due cose che non hanno nulla in comune; che la verità scientifica, che è dimostrata, non possa in alcun modo essere accostata alla verità morale, che è sentita.
> E tuttavia io non posso separarle, e chi ama l'una non può fare a meno di amare anche l'altra. Per trovare l'una, così come per trovare l'altra, è necessario affrancare completamente la propria anima dal pregiudizio e dalla passione, è necessario raggiungere l'assoluta sincerità. Questi due tipi di verità, una volta scoperti, ci procurano la medesima gioia; l'una e l'altra, quando vengono apprese, brillano del medesimo splendore, uno splendore tale che per non vederlo dobbiamo chiudere gli occhi. Entrambe, infine, ci attraggono e ci sfuggono; esse non sono mai qualcosa di immobile: quando crediamo di averle raggiunte, scopriamo di dover avanzare ancora, e colui che le insegue è condannato a non conoscere mai il riposo.
> Va aggiunto che quelli che temono l'una, avranno paura anche dell'altra; essi sono infatti coloro che in ogni cosa si preoccupano innanzitutto delle conseguenze. In una parola, io accosto queste due verità perché sono le medesime ragioni a farcele amare e perché sono le medesime ragioni a farcele temere.[4]

La topologia e la congettura di Poincaré

Si è detto che Poincaré non ha inventato la topologia, ma le ha dato le ali. Questa affermazione è sicuramente vera, e corre anzi il rischio di sminuire la realtà dei fatti. I suoi citati sei grandi articoli crearono quasi dal nulla il campo della topologia algebrica. La nuova disciplina avrebbe guidato alcuni dei più grandi successi matematici del XX secolo. Poincaré scriveva per essere compreso, usava numerosi esempi, in uno stile che, secondo gli standard odierni, sembrerebbe prendersela troppo con comodo. Tuttavia, per i matematici di allora, il mero numero delle idee genuinamente nuove contenute nei suoi scritti rendeva la loro lettura un'esperienza di arricchimento senza eguali. Guidato dalla sua intuizione, Poincaré spaziava lontano dalle aree conosciute, dai campi nei quali c'erano già basi solide. Ogni risultato, ogni singola pagina, catturavano l'incauto navigatore e lo attiravano in acque intellettuali pericolose, la cui esplorazione avrebbe richiesto gli sforzi e la determinazione di intere schiere di esperti. I campi della topologia generale e della topologia combinatoria sono cresciuti in parte come un tentativo di permettere agli altri di percorrere quelle regioni in cui Poincaré si era mosso per primo.

L'ultima affermazione del quinto e ultimo complemento, la congettura di Poincaré, affascinò fin

da subito i matematici come il canto di una sirena. Si tratta della più semplice domanda che ci si può porre quando si riflette sulla forma dell'universo. Per chi leggeva quegli articoli, questa domanda diventava un'ossessione. La prima vittima, oltre allo stesso Poincaré, fu il brillante Max Dehn.

Dehn si era conquistato una fama quand'era ancora uno studente a Gottinga risolvendo il terzo dei famosi 23 problemi del secolo che Hilbert aveva elencato nel 1900.[5] Dehn mostrò che non era possibile sezionare (con tagli planari) un tetraedro in un numero finito di parti e ricomporre poi assieme queste parti così da ottenere un cubo. Questo problema attendeva una soluzione fin dai tempi di Euclide, e sia Gauss sia Hilbert vi avevano lavorato senza successo. Dal risultato ottenuto da Dehn conseguiva anche l'impossibilità di definire il volume di un poliedro senza ricorrere a costruzioni infinite.[6]

A Gottinga, Dehn si appassionò alla formulazione di definizioni rigorose e al ragionamento assiomatico. Il controesempio di Heegaard alla prima formulazione di Poincaré del teorema di dualità spinse quest'ultimo nella direzione di definizioni più combinatorie delle varietà e dei gruppi di omologia che, a loro volta, si prestavano bene alle formulazioni assiomatiche. Dehn e Heegaard si erano incontrati al Congresso internazionale dei matematici tenutosi a Heidelberg nel 1904 e avevano iniziato a lavorare assieme.[7] Scrissero per l'*Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften* — un progetto supervisionato da Klein — un articolo a quattro mani che tracciava con cura, e molto formalmente, le basi della topologia combinatoria.[8] Apparso nel 1907, questo articolo presentava la prima classificazione assolutamente rigorosa delle superfici. Esso, poi, conteneva una spiegazione erronea di come Poincaré aveva costruito il suo spazio dodecaedrico: gli autori avevano commesso un errore che Poincaré aveva invece evitato. L'esempio da essi sostituito a quello di Poincaré era in realtà una 3-sfera, non lo spazio dodecaedrico. Il loro errore non fece altro che mettere in evidenza la sottigliezza della costruzione di Poincaré: il matematico francese doveva aver ponderato molte differenti possibilità prima di trovare il suo esempio.

Dehn rimase molto colpito dall'articolo di Poincaré del 1904, su cui sarebbe tornato a riflettere per il resto della sua vita. Nel 1908, egli pensò di essere riuscito a dimostrare la congettura di Poincaré. Mandò la propria prova ai «Mathematische Annalen» e scrisse a Hilbert invitandolo ad accelerare la pubblicazione per evitare che qualcun altro vi arrivasse prima. Qualcuno come chi? «Poincaré, per esempio» scrisse. Tuttavia, dopo aver discusso con il topologo Heinrich Tietze al Congresso internazionale dei matematici tenutosi a Roma nel 1908, Dehn si accorse che il proprio ragionamento era sbagliato e ritirò l'articolo.[9]

Lo spazio dodecaedrico di Poincaré fu il primo esempio di una 3-varietà i cui gruppi di omologia sono identici a quelli della 3-sfera, ma che non è omeomorfa alla 3-sfera. All'epoca, la semplice descrizione di questo esempio nei termini di identificare le facce opposte di un dodecaedro non era disponibile, e questo spazio sembrava qualcosa di totalmente misterioso. Le varietà di questo tipo, oggi note come «sfere di omologia», sembravano essere spuntate fuori dal nulla. Ce n'erano altre? E, se sì, c'era un modo per trovarle?

Al fine di produrre ulteriori esempi, Dehn inventò un precursore di quel processo che attualmente chiamiamo «chirurgia di Dehn». Per descriverlo, teniamo innanzitutto a mente che una 3-sfera può essere pensata come l'unione di due palle solide ottenuta identificando i punti corrispondenti sulle sfere che fanno da bordo alle due palle. Per visualizzare questo processo, prendiamo una palla solida nella 3-sfera. Dato che appunto la 3-sfera può essere concepita come il risultato che si ottiene incollando assieme due palle solide lungo i loro bordi (si veda il capitolo 4), la regione all'esterno della nostra palla è a sua volta una palla solida. Analogamente, se prendiamo un toro solido (non annodato) nella 3-sfera, la regione all'esterno del toro è a sua volta un toro solido. La chirurgia di Dehn è il processo che consente di rimuovere un toro solido dalla 3-sfera e di reinserirlo in un modo differente. Per far questo, dobbiamo solo mappare il primo toro — quello che fa da bordo al toro solido che abbiamo rimosso — sull'altro toro (identico), che fa da bordo a ciò che è rimasto. Ci sono molti modi per svolgere questa operazione, tutti fondamentalmente diversi l'uno dall'altro. Per esempio, possiamo tagliare il toro lungo un meridiano, dargli uno o più giri di torsione e quindi riconnetterlo al toro originario. Possiamo pensare a un idraulico inesperto che, nel riparare una

conduttura, tagli via un cilindro da un tubo, gli imprima un giro completo di torsione, poi riaccosti le estremità al punto di taglio e le saldi nuovamente. Proprio come il funzionamento della tubatura potrebbe avere qualche problema dopo un simile intervento, allo stesso modo la varietà che risulta dall'applicazione della chirurgia di Dehn potrebbe non essere omeomorfa alla 3-sfera.

Nel 1910, Dehn e Heegaard pubblicarono un famoso articolo che sfruttava la chirurgia di Dehn per produrre una serie infinita di 3-varietà che erano sfere di omologia.[10] Essi conclusero il loro articolo abbozzando un ragionamento che speravano avrebbe condotto a una dimostrazione della congettura di Poincaré, ma evidenziando anche allo stesso tempo una falla che per il momento impediva al ragionamento di funzionare. Entrambi gli autori erano chiaramente convinti che la congettura di Poincaré fosse vera. Questo articolo rese evidente al resto della comunità matematica che, vera o meno che fosse, la congettura era comunque difficile da risolvere.

L'articolo del 1910 è interessante anche per diverse altre ragioni. Esso mostrò che c'era una connessione fra le sfere di omologia e la geometria non-euclidea.[11] Esaminò inoltre alcune connessioni fra la teoria dei nodi e le 3-varietà. Uno dei suoi risultati più sorprendenti si basava su un altro celebre risultato, noto come «lemma di Dehn», che Dehn pensava di aver dimostrato. Tuttavia, nella prova da lui fornita venne in seguito trovato un errore, e il lemma di Dehn fu effettivamente dimostrato solo nel 1957.[12]

Heinrich Tietze, il cauto matematico che aveva trattenuto Dehn dal pubblicare la sua dimostrazione erronea della congettura di Poincaré, fu uno dei grandi nel giovane campo della topologia. Austriaco di nascita, ereditò il suo interesse per la topologia dal teorico austriaco delle funzioni Wilhelm Wirtinger. Wirtinger, che era stato pesantemente influenzato da Klein e aveva vasti interessi nell'ambito della matematica, aveva iniziato a usare metodi topologici per investigare le funzioni di due variabili complesse che erano definite implicitamente da un polinomio in tre variabili complesse. L'*Habilitationsschrift* di Tietze fornì una lucida esposizione e un coerente approccio combinatorio alle 3-varietà. Tietze evidenziò anche alcune delle questioni fondamentali lasciate irrisolte dal lavoro di Poincaré, e introdusse diverse distinzioni di importanza cruciale per questo campo che stava sviluppandosi.[13]

La relatività

Sebbene la topologia del XX secolo sia nata con Poincaré, e anche se lui stesso ne sottolineò l'importanza, essa costituì soltanto una piccola parte del suo lavoro. Poincaré fu coinvolto in alcune delle altre grandi conquiste scientifiche dell'epoca, e la sua analisi della propria attività, stesa nel 1901, dedica solo 3 delle 99 pagine complessive alla topologia. Similmente, la topologia occupa meno di una delle 74 pagine dell'elogio funebre di Poincaré scritto da Gaston Darboux. Solo 2 delle 85 pagine della presentazione dell'opera del matematico scritta da Jacques Hadamard fanno riferimento alla topologia.[14] E meno di 10 degli oltre 500 articoli dello stesso Poincaré sono dedicati alla topologia.

Poincaré era membro del Bureau des Longitudes e guidò gli sforzi di questa istituzione volti a sincronizzare il tempo nel mondo. Supervisionò il rapporto del 1897 sull'adozione del sistema decimale per il tempo e fece da punto di collegamento fra l'Accademia delle scienze e la complessa missione per la determinazione della longitudine a *Quito*, in Ecuador. Fu uno degli uomini lungimiranti che vollero usare la Torre Eiffel per inviare segnali orari sincronizzati, il precursore dell'odierno sistema GPS, un uso innovativo del grande traliccio di ferro di Parigi che permetteva la sincronizzazione degli orologi e la determinazione della longitudine.

In parte a causa di questi incarichi, in parte per via del suo interesse per la fisica matematica e la meccanica celeste, Poincaré aveva riflettuto profondamente sulla natura del tempo. Nel 1898, scrisse un articolo in cui si chiedeva se un secondo di oggi fosse uguale a un secondo di domani, e se avesse senso dire che due eventi in luoghi differenti accadono nello stesso momento. Era impegnato a dedurre le conseguenze di esperimenti che sembravano suggerire che le distanze si contraessero nella direzione del moto. Nel 1905, un allora sconosciuto impiegato dell'Ufficio

brevetti svizzero, Albert Einstein, salì alla ribalta del mondo scientifico con quattro importanti articoli che oggi vengono considerati come classici. Nel 1909, Einstein era ormai riconosciuto come un pensatore di prim'ordine, sullo stesso piano di Poincaré. Il rapporto fra questi due uomini era complesso: si incontrarono di persona solo una volta, a una conferenza tenutasi nel 1911 a Solvay, in Belgio. Poincaré aveva un'altissima opinione di Einstein; Einstein, dal canto suo, vedeva Poincaré come uno dei vecchi reazionari che restavano ostinatamente aggrappati a concetti inutili come quello di etere.[15]

Alcuni attribuiscono a Poincaré la scoperta indipendente della relatività speciale, citando a sostegno di questa tesi il suo magnifico articolo sulla dinamica dell'elettrone.[16] L'interazione fra i presupposti filosofici dell'epoca, la sua scienza pura (specialmente la fisica) e le sue esigenze tecnologiche (i francesi avevano possedimenti oltreoceano da amministrare; gli svizzeri, un complicato sistema di orari ferroviari da coordinare), e i bagagli culturali e i temperamenti di Poincaré e di Einstein sono stati descritti in modo affascinante in un recente libro dello storico della scienza Peter Galison:

> Fu davvero Einstein a scoprire la relatività? Non l'aveva già scoperta Poincaré? Queste vecchie domande sono diventate tanto tediose quanto sono sterili [...] C'erano in campo due grandi visioni moderne della fisica, due tentativi ferocemente ambiziosi di comprendere il mondo nella sua totalità [...] Uno [quello di Poincaré] era costruttivo, mirando a sviluppare una complessità che avrebbe catturato le relazioni strutturali del mondo. L'altro [quello di Einstein] era più critico, più disposto a metter da parte la complessità al fine di afferrare, in modo austero, quei princìpi che riflettevano il fondamentale ordine naturale [...] Il Bureau des Longitudes che Poincaré aveva contribuito a supervisionare si ergeva come uno dei grandi centri mondiali dell'epoca nel campo della creazione delle mappe. E l'Ufficio brevetti svizzero, dove Einstein aveva montato la guardia vigilando sui brevetti, era il grande punto di ispezione dove la Svizzera controllava le tecnologie inventate per sincronizzare il tempo sulla rete ferroviaria e nelle città.[17]

Come la topologia, anche la teoria della relatività aveva iniziato a infiltrarsi nella coscienza scientifica dell'epoca. Il principio chiave di questa teoria, secondo il quale le leggi della fisica devono apparire identiche agli osservatori che si muovono a velocità costante gli uni rispetto agli altri, aveva enormi conseguenze, tra cui il fatto che la materia e l'energia erano due manifestazioni dello stesso fenomeno e che il tempo e lo spazio erano totalmente interdipendenti e si dilatavano alle velocità più elevate. Poincaré fu probabilmente il primo a mettere assieme lo spazio e il tempo in quell'oggetto matematico che sarebbe poi stato chiamato «spazio-tempo». Hermann Minkowski, di Gottinga, mostrò che il modo migliore per comprendere il lavoro di Hendrik Lorentz, di Poincaré e di Einstein era nei termini di una nuova geometria non-euclidea sullo spazio-tempo. Inizialmente, Einstein era scettico. Nel 1912, però, era diventato più disponibile; procedendo nei suoi studi, stava ora cercando di generalizzare la relatività speciale applicandola al contesto in cui gli osservatori si trovino in qualunque tipo di moto (e, in particolare, in condizione di moto accelerato) gli uni rispetto agli altri. Alla fine, egli avrebbe scoperto che le leggi generali della fisica potevano essere formulate in termini di geometria riemanniana sullo spazio-tempo.

La Germania e Gottinga

Dopo il grave esaurimento del 1882, in parte dovuto all'eccessivo lavoro indotto dalla rivalità con Poincaré, Felix Klein — anche mentre era afflitto dalla depressione — continuò a impegnarsi per fare di Lipsia un grande centro di ricerca. La sua fama mondiale continuava a crescere. L'offerta della cattedra di matematica (da poco vacante) della Johns Hopkins University, la prima istituzione di ricerca universitaria negli Stati Uniti, rinvigorì il suo spirito. Sarebbe quasi certamente partito se il rettore gli avesse offerto il salario di 6000 dollari percepito dal precedente professore. Il rettore, però, rimase fermo su un'offerta di 5000 dollari, e Klein la rifiutò. È allettante, anche se inutile, fantasticare su come la professione matematica negli Stati Uniti si sarebbe sviluppata se Klein si

fosse trasferito presso la Johns Hopkins. D'altro canto è desolante pensare che un'opportunità formativa di un'intera generazione sia andata perduta per soli 1000 dollari.

In parte in risposta all'offerta della Johns Hopkins, nel 1886 Klein ricevette un'altra allettante proposta da Gottinga, in un periodo in cui il numero degli iscritti a matematica in Germania stava iniziando a collassare. Klein era un insegnante profondamente capace, esigente, dotato quasi di un magnetismo faustiano. La partecipazione ai suoi seminari era a numero rigorosamente chiuso. Non sopportava volentieri le folle, e solo gli studenti più dotati e più disposti a lavorare sodo erano ammessi a frequentare i suoi corsi. Le sue lezioni erano preparate con cura, e lui possedeva un autentico talento nell'esporre le sue argomentazioni. Poteva esaminare un esempio significativo ricavandone esattamente i dettagli sufficienti a illustrare le linee principali di un ragionamento. Si serviva quindi di quell'esempio come di un modo per esplorare un intero panorama concettuale. Amava le tematiche di largo respiro e sottolineava come concetti differenti fossero collegati gli uni agli altri in modi a volte sottili. I tecnicismi lo annoiavano. A turno, i suoi studenti mettevano diligentemente per iscritto ognuna delle sue lezioni, completando i dettagli (alcuni dei quali erano decisamente complessi e contenevano problemi matematici che non erano affatto facili da risolvere).

Klein coltivava un approccio accademico di ampie vedute della matematica che contrastava con la concentrazione su campi di ricerca estremamente ristretti, caratteristica dei corsi tenuti da alcuni suoi colleghi, e che attraeva gli studenti anche dall'estero, in particolare dagli Stati Uniti. Egli giocò un ruolo decisivo nella creazione della comunità matematica americana formando quei matematici che, anni dopo, avrebbero contribuito a costruire quelle che sarebbero diventate grandi istituzioni di ricerca.[18] Egli, inoltre, incoraggiava molto le donne che si dedicavano alla matematica e seguì diverse dottorande di ricerca.

Per quanto Klein fosse un ottimo insegnante (e ricercatore), fu come amministratore che esercitò la sua influenza più profonda. Aveva fiuto per il talento matematico e non aveva paura di assumere persone più dotate di lui. Come insegnante e direttore dell'autorevole rivista tedesca «Mathematische Annalen», potè entrare in contatto con i giovani più capaci dell'epoca. Era intellettualmente generoso, coltivava i contatti con le persone e si prendeva a cuore il lavoro dei giovani, aiutandoli ad assicurarsi una posizione. Un sistema universitario organizzato di fatto come un vivaio, assieme alla sua disponibilità ad assumersi dei rischi, alla sua abilità nei maneggi e alla sua amicizia con Althoff (il ministro prussiano dell'Istruzione superiore), gli permisero di compiere una serie di ottime assunzioni.

A Gottinga, il successo di Klein nel creare una comunità accademica diede vita a una Camelot della matematica. Il punto di svolta fu l'assunzione di David Hilbert, il suo brillante ex allievo di Lipsia. Dopo essersi trasferito a Gottinga, Klein era rimasto in contatto con Hilbert e lo aveva incoraggiato a visitare Parigi, dove questi ebbe modo di incontrare molti matematici francesi (tra cui Poincaré). Di ritorno in Germania, Hilbert iniziò a interessarsi a una delle questioni più rilevanti dell'epoca, il «problema di Gordan», che esprime in forma astratta l'esperienza per cui noi riconosciamo oggetti come persone, alberi e luoghi anche dopo che il tempo o il cambiamento di prospettiva hanno introdotto delle variazioni. In termini matematici, possiamo pensare a un gruppo di trasformazioni che opera su un insieme di oggetti matematici, solitamente descritti da equazioni, e chiederci se esistono alcuni oggetti o quantità, normalmente descritti da espressioni algebriche, che rimangono invarianti sotto quel gruppo di trasformazioni. Dal momento che c'erano tantissimi insiemi di equazioni su cui ci si poteva fruttuosamente concentrare, e tantissimi gruppi di trasformazioni che risultavano geometricamente significative e accessibili sotto il profilo del calcolo, le questioni attinenti al calcolo degli invarianti per un dato insieme di equazioni e uno specifico gruppo di trasformazioni costituivano una piccola industria che forniva centinaia di problemi sottili, ma relativamente accessibili, ai matematici e ai loro studenti.

Oltre che in Germania, lo studio degli invarianti era popolare anche in Inghilterra, e i primi specializzandi della Johns Hopkins, sotto l'influenza dell'emigrato britannico J. J. Sylvester, avevano calcolato gli invarianti di numerosissimi oggetti matematici. Il re indiscusso di tutta questa impresa era Paul Gordan, un amico di Klein che insegnava all'Università di Erlangen. Egli aveva

ottenuto il miglior risultato generale sugli invarianti. Grazie a questi sforzi, la struttura generale di tali invarianti era ormai nota per un insieme relativamente ampio di equazioni e un buon numero di gruppi.[19] Il problema di Gordan poneva l'interrogativo se, per un qualunque insieme di equazioni e un qualunque gruppo, fosse possibile trovare un insieme finito di espressioni invarianti nei termini delle quali fosse possibile ricavare tutte le altre. Procedendo con la forza bruta dei calcoli, Gordan mostrò che ciò era vero nel caso di tutte le equazioni in due variabili e un'ampia classe di gruppi. Questo risultato era considerato straordinario.

Tutti davano tacitamente per scontato che, qualora la risposta al problema di Gordan fosse stata affermativa, per risolverlo sarebbe stato necessario derivare esplicitamente gli invarianti per alcuni insiemi rappresentativi di equazioni e gruppi, accertarsi pazientemente che l'elenco degli invarianti fosse completo in ogni singolo caso e, quindi, mostrare (in qualche modo) che il risultato ottenuto per questi insiemi rappresentativi doveva valere per ogni gruppo e ogni insieme di equazioni. Si trattava di un compito immane, e il lavoro necessario per svolgerlo avrebbe tenuto impegnate generazioni di matematici. In un articolo di quattro pagine pubblicato dopo un anno trascorso a combattervi, Hilbert risolvette completamente il problema mostrando che l'assunzione della non esistenza di una tale base finita conduceva a una contraddizione. Pertanto, l'esistenza di una base di questo tipo era logicamente necessaria. Le prime reazioni furono di stupita incredulità. « *Unheimlich»,* «formidabile», mormorò Ferdinand von Lindemann, uno dei colleghi più anziani di Hilbert. *«Dos ist nicht Mathematik. Das ist Theologie»* dichiarò Gordan.[20] Klein rimase incantato.

Nonostante l'ineluttabile schiettezza del suo ragionamento, Hilbert era un matematico troppo appassionato per non essere interessato ai modi di calcolare effettivamente questi insiemi di invarianti, e fece sostanziali progressi usando, anche in questo caso, dei metodi che ai ricercatori che lavoravano in questo campo sembravano totalmente estranei alla consuetudine.[21] Mise tutto per iscritto e, su richiesta di Hilbert, inviò l'articolo ai «Mathematische Annalen». Gordan, incaricato di valutare lo scritto, si lamentò che il criterio di verità seguito da Hilbert non era stato quello di presentare delle tesi che fossero al di là di ogni possibile dubbio, quanto piuttosto quello di accontentarsi che nessuno lo potesse contraddire. Una volta saputo il giudizio espresso da Gordan, Hilbert scrisse a Klein dicendo che non era disposto a cambiare nulla e che questa rimaneva la sua ultima parola sull'argomento, a meno che qualcuno non fosse in grado di mostrare che le sue argomentazioni erano sbagliate. La determinazione e la fermezza di questo giovane avranno senz'altro ricordato a Klein il suo scontro con Poincaré. Hilbert era una persona ragionevole, ma c'era un punto sul quale non era disposto a cedere, mettendo così il suo vecchio maestro in una posizione difficile. Klein si schierò dalla parte dell'allievo, trovando il suo pensiero «del tutto semplice, e quindi logicamente cogente». Egli decise inoltre che questi doveva raggiungerlo a Gottinga.

Nel 1895, Klein riuscì infine ad assumere Hilbert e l'ateneo divenne il più forte centro matematico in Germania. Gli studenti ebbero presto modo di scoprire il talento di Hilbert. Era interessato ai dettagli e a volte si bloccava su qualche punto, ma vederlo mentre si faceva strada attraverso le difficoltà era un'esperienza molto istruttiva. Le sue lezioni erano eleganti, anche se non raffinate come quelle di Klein. Se Klein spaziava in lungo e in largo, Hilbert preferiva concentrarsi. Era un minimalista e cercava la via più breve per affrontare i diversi problemi.

Con la presenza di Hilbert, Gottinga acquistò una personalità e un matematico di peso sufficiente a superare Klein. Mentre quest'ultimo amava le affermazioni altisonanti ed era felice di partecipare ai maneggi politici e soppesare le conseguenze delle possibili scelte, Hilbert diffidava delle affermazioni di carattere troppo generale ed era assolutamente diretto. Klein era un impresario, e Hilbert un matematico straordinariamente bravo e serio. Insieme formavano una coppia formidabile.

I matematici accorsero in massa a Gottinga e le nomine straordinarie si susseguirono una dopo l'altra. L'Università di Berlino, che sulla carta era la più prestigiosa del Paese, cercò di assumere Hilbert, ma lui scelse di rimanere a Gottinga.

I campi di ricerca dello studioso nel corso degli anni spaziarono notevolmente. Il suo modus operandi era quello di cambiare interamente campo ogni decennio circa e di compiere fondamentali

progressi in ogni ambito approcciato. Iniziò con la teoria degli invarianti, quindi passò alla teoria algebrica dei numeri e, verso la fine del XIX secolo, sviluppò un profondo interesse per i fondamenti della geometria. Hilbert riscrisse completamente gli *Elementi* di Euclide, presentandone l'intero sviluppo su basi del tutto rigorose. Si impegnò a formulare assiomi che fossero così chiari e trasparenti da non ammettere nessuna ambiguità. Sostenne che gli assiomi dovevano essere talmente completi da consentire la sostituzione dei termini euclidei «punto», «retta» e «piano» con «birra», «gamba di tavolo» e «sedia» senza con ciò compromettere la validità della teoria stessa. La teoria, cioè, doveva essere in grado di reggersi senza che vi fosse bisogno di ricorrere all'intuizione per colmare qualche vuoto. Il piccolo libro di Hilbert sui fondamenti della geometria divenne un best seller.[22] In questo volume, che diede nuova vita a un tema molto vecchio, Hilbert si spinse parecchio al di là di Euclide. Egli non si limitò a introdurre nuovi assiomi in grado di catturare esplicitamente concetti come quelli relativi all'ordine e al trovarsi tra due punti — nozioni di cui Euclide si era servito dandole tacitamente per scontate —, ma modificò anche gli assiomi stessi, ottenendo così geometrie differenti.

Poincaré fu entusiasta di questo libro e ne scrisse un'accurata recensione in toni molto favorevoli, mostrando chiaramente che aveva riflettuto su questi materiali e sulle loro implicazioni. Era un po' preoccupato dalla passione nutrita da Hilbert per la logica a spese della geometria: «Sembra interessato al solo punto di vista logico». Concluse affermando che «la sua opera è quindi incompleta, ma questa mia asserzione non va letta come una critica nei suoi confronti. Alla fine, ognuno di noi deve rassegnarsi alla propria incompletezza. È sufficiente che lui abbia fatto compiere alla filosofia della matematica un grande passo in avanti, paragonabile a quelli che dobbiamo a Lobačevskij, a Riemann, a [Hermann von] Helmholtz e a [Sophus] Lie».[23] Poincaré non era uno che tendeva a esagerare. Il suo era proprio un elogio sperticato.

Hilbert riuscì a dimostrare che la geometria euclidea era coerente ammesso che lo fosse l'aritmetica. Hilbert, al pari di Klein, era interessato a quasi tutte le branche della matematica. Si dedicò alla logica matematica, apportando fondamentali contributi che avrebbero dato inizio ad alcune delle più grandi conquiste del XX secolo, ma che trascendevano lo scopo del suo libro. Nel 1900, egli tenne un discorso al Congresso internazionale di Parigi in cui elencò i famosi 23 problemi sui quali riteneva che i matematici avrebbero dovuto concentrare le loro ricerche nel nuovo secolo. L'elenco ebbe un'enorme influenza. Negli anni successivi, Hilbert si interessò sempre di più alla fisica matematica e Gottinga ebbe un ruolo determinante nello sviluppo delle nuove teorie della relatività e della meccanica quantistica. Nel 1910, Gottinga poteva vantare centinaia di studenti di matematica accorsi da tutto il mondo e un elenco di liberi docenti *(Privatdozenten)* e di assistenti che sembra una lista delle personalità di rilievo della fisica matematica dell'epoca. Donne, ebrei, gente di ogni nazionalità, erano tutti benvenuti.[24] Hilbert invitò anche Poincaré, il quale tenne cinque lezioni a Gottinga e altre quattro in Germania.

La morte di Poincaré

Poincaré nel corso del Congresso internazionale dei matematici di Roma, nell'aprile 1908, si ammalò gravemente. A causa di un allargamento della prostata dovette passare gran parte del tempo a letto e non fu in grado di tenere il suo discorso, che venne letto da Darboux. Fu necessario procedere con un intervento chirurgico e sua moglie, Louise, lo raggiunse a Roma per poi riaccompagnarlo a Parigi. Anche se in seguito, tutto sommato, si riprese e ricominciò a lavorare, le sue condizioni di salute non furono più molto buone.

Pare che avesse una sorta di presentimento della propria morte. Nel dicembre 1911, mandò una lettera al direttore della rivista che aveva pubblicato il suo quinto complemento e l'articolo sulla dinamica degli elettroni:

> Mio caro amico, vi ho già parlato durante la vostra ultima visita di un articolo che tengo nel cassetto da due anni. Non ho fatto nessun ulteriore progresso e avevo provvisoriamente deciso di lasciarlo da

> parte a maturare per un po'. Ciò andrebbe bene se fossi certo di essere in grado di ritornarci sopra, un giorno o l'altro. Ma, alla mia età, non ho più questa sicurezza.

Il direttore lo spinse a pubblicarlo, dicendo a Poincaré che avrebbe potuto far precedere lo scritto da una prefazione in cui spiegava la situazione. L'articolo, che apparve nel 1912, si apriva con le scuse di Poincaré: «Finora non ho mai presentato al pubblico un lavoro così incompiuto».[25] Poincaré proseguiva dicendo che diversi problemi della dinamica concernenti l'esistenza di soluzioni periodiche del problema dei tre corpi dipendevano da un semplice risultato geometrico della cui verità era sempre più profondamente convinto, ma che non era riuscito a dimostrare. Lasciava intendere che lui ormai non aveva più molto tempo davanti a sé, e sperava che altri matematici avrebbero avuto più successo. Questo episodio ci conferma l'attenzione che Poincaré prestava alle proprie pubblicazioni. Forse non dedicava molto tempo a rivederle, ma era scrupoloso riguardo ai suoi risultati. Questo articolo fu l'ultimo scritto di geometria di Poincaré e segnò la nascita di un ulteriore nuovo campo di ricerca, la «topologia simplettica», che studia le varietà dotate di una struttura addizionale che consente di definire su di esse aree di superficie (anche se non necessariamente lunghezze di curve).[26]

Un secondo intervento chirurgico, nel luglio 1912, sembrò essere andato perfettamente. Tuttavia, il 17 luglio, a Parigi, Poincaré venne colpito da un'embolia mentre si stava vestendo. La sua morte improvvisa, sopraggiunta mentre era ancora nel pieno delle sue capacità, sconvolse il mondo intero. I tributi alla sua figura affluirono a Parigi. «Henri Poincaré è stato davvero il cervello vivente delle scienze razionali», recitava un necrologio su «LeTemps».[27] Ai suoi funerali, tenuti a Parigi, parteciparono capi di Stato e rappresentanti di ogni grande università. Il miglior matematico francese, Jacques Hadamard, che aveva solo cinque anni meno di Poincaré, venne incaricato di approntare una presentazione della sua opera. Gottinga preparò una retrospettiva. Gaston Darboux tenne un lungo elogio funebre documentando i suoi contributi in numerosi campi.

Poincaré visse totalmente immerso nel suo tempo, e il suo lavoro al servizio della scienza e della Francia rappresentò il meglio della sua epoca. La sua prematura scomparsa sembrava avere un qualche significato più profondo di quello vagamente afferrato dai suoi panegiristi. A un secolo di distanza, ciò che è più evidente è che Poincaré aveva piantato i semi di una matematica interamente nuova. Ma non si fermò qui: il suo intervento del 1904 sul futuro della fisica matematica sarebbe stato spaventosamente profetico.[28] A differenza di Riemann, egli morì famoso e con molti ammiratori. Ma, come Riemann, anche lui senza discepoli. All'epoca, gran parte dei lavori matematici di Poincaré non venivano ancora compresi. L'uomo Poincaré era morto, ma le sue idee e la sua congettura sopravvissero. Anche se il sopraggiungere di alcuni eventi di grande portata impedì una prosecuzione immediata della sua opera da parte di altri studiosi, decenni più tardi le idee e i problemi che Poincaré aveva solo iniziato ad affrontare sarebbero stati pienamente compresi.

12
La congettura diventa famosa

A quei tempi, i primissimi anni del XX secolo sembravano annunciare una nuova era in cui l'internazionalismo e i valori condivisi avrebbero garantito una crescente prosperità, nonché un ordine internazionale con l'Europa saldamente al vertice. Le fiere mondiali, più di 100 nei tre decenni a partire dal 1880, venivano a celebrare l'erudizione, la cultura e il progresso tecnologico.[1] La matematica, come le scienze, era diventata in tutto e per tutto un'attività professionale, e rifletteva l'esuberanza dei tempi. I grandi centri rimanevano le università tedesche e Parigi, ma la creazione di società matematiche nazionali (Mosca 1864, Londra 1865, Francia 1872, Tokyo 1877, Palermo 1884, New York 1888 e Germania 1890) rispecchiava il fatto che la matematica veniva coltivata seriamente anche altrove. Poincaré e la sua opera costituivano un esempio di come il forte orientamento internazionale conviveva con un altrettanto saldo patriottismo. Il cuore di Poincaré era francese, ma la sua visione era internazionale. I problemi su cui lavorava traevano ispirazione da — e contribuivano alla crescita di — una comunità matematica che vedeva se stessa come una realtà decisamente internazionale.

Palermo, sulla costa settentrionale della Sicilia, era una città rappresentativa di questo nuovo periodo. Ospitava un ricco ceto medio e un fiorente ambiente culturale.[2] I numerosi templi greci disseminati in Sicilia (ce ne sono di più che non nella stessa Grecia) suggerivano la presenza di radici culturali e intellettuali quasi indistruttibili e rimandavano al glorioso passato dell'isola. La società matematica di Palermo, fondata nel 1884, crebbe fino a diventare la più grande esistente al mondo. La sua pubblicazione, i «Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo», era la rivista internazionale con la più ampia diffusione.[3] Il primo e il quinto complemento — e la congettura di Poincaré in particolare — apparvero su questo periodico. In un certo senso, sembra appropriato che ciò che oggi chiamiamo spazio tridimensionale dodecaedrico di Poincaré abbia fatto la sua prima comparsa proprio vicino al luogo dove, millenni prima, era stato scoperto il dodecaedro: Palermo si trova infatti a circa trecento chilometri da Crotone, dove Pitagora si era stabilito con i suoi discepoli.

Ma Poincaré aveva incarnato anche le contraddizioni della sua epoca. Pur essendo un internazionalista che credeva con fervore nei valori universali dell'Illuminismo razionalista, egli era anche altrettanto certo che la Francia e la Terza Repubblica rappresentassero il baluardo di questi valori. Sciovinista, non era mai riuscito a liberarsi dal senso di vergogna e di catastrofe nazionale originato dalla sconfitta del 1870.[4] Alla fine, il putridume del nazionalismo avrebbe prevalso sul vento dell'internazionalismo dell'epoca. Meno di due anni dopo la morte di Poincaré, il 28 giugno 1914, Gavrilo Princip — un membro di una società segreta serba — sparò all'arciduca austriaco Francesco Ferdinando, uccidendolo. La rete dei trattati trascinò una nazione dopo l'altra in quella tragedia che fu la Grande guerra. L'Austria prese le armi contro la Serbia, la Russia scese in campo al fianco della Serbia contro l'Austria, la Germania si mobilitò in supporto dell'Austria contro la Russia, e la Francia si oppose alla Germania a sostegno dell'alleato russo. La Germania attaccò preventivamente la Francia e, prima della fine di agosto, più di una dozzina di Paesi erano entrati in guerra. All'epoca, il conflitto non venne percepito «come una somma tragedia, ma come un'interruzione delle più esasperanti [...]».[5]

Ma la Grande guerra fu molto più di un'interruzione. Fra le sue molte devastazioni, essa divise i matematici e provocò il sovvertimento di ogni accordo internazionale. L'orgoglio e le rivalità nazionali si incancrenirono nell'odio. Klein firmò una dichiarazione di alcuni famosi scienziati e artisti tedeschi che proclamavano il loro sostegno al Kaiser e asserivano che tutta una serie di

affermazioni sullo Stato tedesco fatte dai nemici della Germania erano false. Egli venne immediatamente espulso dall'Accademia delle scienze di Parigi, che non gli avrebbe mai perdonato il fatto di aver sottoscritto quella carta. I più influenti matematici francesi divennero fanaticamente antitedeschi.

La guerra distrusse il vecchio ordine e indebolì fatalmente l'Europa. Un'intera generazione di promettenti matematici europei scomparve nella carneficina. Le condizioni economiche distrussero ciò che le bombe e i gas avevano risparmiato. La ricchezza di Palermo si disperse e il Circolo Matematico iniziò una discesa a spirale. In Germania, l'inflazione galoppante — causata in parte dalle riparazioni di guerra imposte dai vincitori — minò alla radice il tessuto della società civile. In Russia, la rivoluzione aprì la strada a individui antisociali che avrebbero inflitto una serie di tragedie al popolo russo. Le crisi economiche e il desiderio di ordine crearono le condizioni adatte per l'estremismo, il totalitarismo e la successiva guerra mondiale.

In retrospettiva, l'ottimismo dei primi anni del XX secolo sembra incredibilmente ingenuo, e l'internazionalismo estremamente fragile. Nella prospettiva che ne abbiamo oggi, l'energia dell'epoca non assomiglia a quella di un corpo giovane e sano, quanto piuttosto agli ultimi, disperati spasmi di un corpo moribondo. Nelle fiere mondiali, le esposizioni culturali che celebravano la gloria dello spirito umano stavano fianco a fianco con immani mostre di armi.[6]

La relatività generale

Ma non tutto andò perduto. Per quanto possano essere assordanti le cannonate, la vita della mente non può mai essere ridotta al silenzio. Poco prima dello scoppio della guerra, Einstein si trasferì da Zurigo, dove occupava una cattedra di professore ordinario, a Berlino, dove avrebbe svolto un'attività di pura ricerca.[7] Per poter estendere la relatività ai contesti con sistemi di riferimento in moto accelerato l'uno rispetto all'altro, egli aveva bisogno di un linguaggio matematico che gli consentisse di usare sistemi di trasformazioni molto generali. Con l'aiuto di Marcel Grossman, un suo amico matematico con cui aveva lavorato a Zurigo, Einstein vide che il lavoro di Riemann si adattava perfettamente ai princìpi fisici che stava scoprendo, permettendo di parlare di variazioni nella curvatura e nella geometria da un punto all'altro. L'apparato concettuale sviluppato dai geometri italiani Gregorio Ricci-Curbastro e dal suo allievo Tullio Levi-Civita, poi, consentì a Einstein di riformulare le equazioni differenziali che esprimevano le leggi classiche della fisica. Nella teoria della relatività generale di Einstein, la forza dovuta all'accelerazione è indistinguibile dalla (e, dunque, equivalente alla) forza di gravità. Se uno si vede in accelerazione rispetto a un determinato punto di riferimento, dirà che quella forza che sta sperimentando è dovuta all'accelerazione. Se invece si vede stazionario rispetto a un determinato punto verso il quale è attratto, si riferirà a quella forza di attrazione indicandola come gravità. L'accelerazione è sempre relativa a qualcos'altro, e le forze di gravità e quelle dovute all'accelerazione sono equivalenti. Einstein espresse la gravità in termini di curvatura dello spazio-tempo (e, stando a Riemann, la curvatura è un tensore che esprime la deviazione da 180 gradi delle somme angolari di triangoli geodetici orientati in qualunque possibile modo rispetto a un osservatore). L'equazione di Einstein descrive la variazione del tensore di curvatura in presenza di materia. La materia incurva lo spazio-tempo. Nel 1915, mentre una generazione di giovani stava morendo nelle trincee, egli formulò quella teoria generale che avrebbe plasmato la visione del mondo delle generazioni a venire. «Con mia grande gioia» scrisse «ho avuto pieno successo nel convincere Hilbert e Klein.»[8]

Il lavoro di Einstein divenne presto famoso. Egli sarebbe diventato una celebrità mondiale nel 1919, quando una spedizione scientifica britannica, osservando un'eclissi solare, misurò che i raggi di luce che passavano di fianco al Sole «si curvavano» esattamente come avevano predetto le sue equazioni. La luce, ovviamente, non si curvava ma in realtà seguiva una geodetica nello spazio-tempo. In realtà, l'enorme massa solare curvava attorno a sé lo spazio-tempo e, di conseguenza, la traiettoria seguita dalla luce sembrava curva.

La ricerca di Einstein stimolò moltissimo lo sviluppo della geometria riemanniana. Al momento,

comunque, non influenzò direttamente lo sviluppo della topologia. Einstein era senz'altro consapevole dell'esistenza di diverse varietà tridimensionali e del fatto che spazio e spazio-tempo avrebbero potuto avere differenti topologie. Le equazioni della relatività generale, però, erano equazioni differenziali e si applicavano a piccole regioni di spazio-tempo. La topologia, invece, riguardava la struttura su larga scala dello spazio (e dello spazio-tempo). Nessuno si sognava che potesse esserci una connessione fra la congettura di Poincaré e la relatività generale.

La congettura di Poincaré fra le due guerre

Dopo il lavoro di Dehn e Tietze, non ci potevano più essere dubbi sulla difficoltà della congettura di Poincaré e sul fatto che l'opera topologica del matematico francese costituisse una grande fonte di problemi interessanti. Dehn e Tietze fornirono un possibile punto di partenza da cui i topologi potevano iniziare ad affrontare l'opera di Poincaré e, in particolare, la sua congettura.

I progressi più decisivi furono merito di un americano, James W. Alexander (1888-1971), che si era recato in Europa per il post-dottorato dopo essersi laureato a Princeton. Alexander era rimasto a Parigi durante la guerra e aveva tradotto in francese la tesi di Heegaard.[9] Nel 1917, si unì all'esercito degli Stati Uniti, ottenendo il grado di capitano, e si congedò nel 1920 per entrare nel corpo docente dell'Università di Princeton. Nel 1919, Alexander dimostrò che due 3-varietà che erano state trovate in precedenza da Tietze, e che avevano lo stesso gruppo fondamentale e gli stessi gruppi di omologia, non erano omeomorfe.[10] Pertanto, la risposta alla domanda se due 3-varietà con lo stesso gruppo fondamentale fossero necessariamente omeomorfe era negativa. La congettura di Poincaré si riferisce a un caso speciale di questa domanda, il caso in cui i gruppi fondamentali hanno solo un singolo elemento. Il risultato di Alexander alzò enormemente la posta sulla congettura di Poincaré e fece emergere con chiarezza la possibilità che fosse falsa.

Alexander proseguì nelle sue ricerche facendo moltissime scoperte di grande rilevanza.[11] Tenne uno degli interventi più significativi al Congresso internazionale dei matematici del 1932, sottolineando l'importanza della congettura di Poincaré.[12] Poco tempo dopo, J. H. C. Whitehead (1904-60), l'accomodante e beneamato matematico britannico che studiò a Princeton e diede in seguito inizio alla forte tradizione topologica di Oxford, annunciò la dimostrazione di un teorema che avrebbe provato la congettura di Poincaré.[13] Il risultato passò l'esame dei recensori e venne pubblicato. Dopo non molto, però, lo stesso Whitehead scoprì un controesempio al suo teorema. Il controesempio di Whitehead, come quello di Poincaré, ci insegna molte cose, ma non dice nulla sulla validità o meno della congettura. Gli amici di Whitehead attribuirono la quasi esasperante precisione mostrata dal matematico nei suoi articoli successivi all'imbarazzo per questo errore.

Nel 1936, la congettura di Poincaré era ormai diventata uno dei problemi più famosi della matematica, e la topologia era uscita dalla sua adolescenza. Vennero pubblicati due manuali, entrambi frutto di interessanti collaborazioni, che esercitarono una profonda influenza e che resero possibile la comprensione di gran parte dell'opera di Poincaré presentandone con cura gli elementi fondamentali.[14] Entrambi questi libri si spinsero oltre Poincaré ampliando significativamente alcuni dei suoi risultati, ed entrambi diedero un importante rilievo alla sua congettura.

Il primo, *Lehrbuch der Topologie* (Manuale di topologia), di Seifert e Threlfall, apparve nel 1934. Adottava l'approccio poliedrico ed era pieno di note ed esempi ben fatti. Le sue origini risalivano a quando il ventenne Herbert Seifert si era iscritto al corso di topologia tenuto da William Threlfall alla Technische Hochschule di Dresda. L'immaginazione di Seifert si accese e i due uomini divennero ben presto amici e collaboratori. Seifert trascorse il semestre 1928-29 a Gottinga, dove incontrò Heinz Hopf (un libero docente) e Pavel Aleksandrov (che era in visita da Mosca e che avrebbe in seguito fondato la grande scuola di topologia moscovita). Seifert fece quindi ritorno a Dresda, si trasferì a casa di Threlfall e i due uomini si misero a lavorare ininterrottamente sulle varietà tridimensionali.

Stando al suo diario, Threlfall voleva che la prefazione del manuale sviluppato a partire dagli appunti delle sue lezioni iniziasse con le seguenti parole: «Questo manuale è nato da un corso che

uno di noi due ha tenuto all'altro presso il Politecnico di Dresda nel 1927, ma ben presto lo studente ha contribuito con così tante nuove idee e ha alterato la presentazione in modo talmente fondamentale, che forse sarebbe stato meglio omettere dal frontespizio il nome dell'autore originario». Di fatto, però, la prefazione recita: «Lo stimolo originario che ci ha portato a scrivere questo libro è stato un corso di lezioni che uno di noi due [Threlfall] ha tenuto presso il Politecnico di Dresda». Il libro sviluppa i concetti principali della topologia attraverso una serie di esempi studiati con cura. Contiene un'attenta discussione dello spazio dodecaedrico di Poincaré e richiama l'attenzione dei lettori sulla congettura di Poincaré: «La "congettura di Poincaré", che fino a oggi non è stata ancora dimostrata, si chiede se la 3-sfera sia caratterizzata dal suo gruppo fondamentale». Nel caso i lettori non abbiano colto il punto, il manuale spiega ulteriormente il concetto: «Oltre alla 3-sfera, ci sono altre varietà tridimensionali chiuse tali che ogni percorso in esse tracciato può essere ridotto a un punto?».[15]

Il secondo manuale, *Topologie,* fu scritto da Aleksandrov e Hopf e andò in stampa durante il convegno internazionale di topologia tenutosi a Mosca nel 1935. Questo libro era una sorta di bibbia — anche se, dei tre volumi originariamente previsti, fu l'unico a essere completato. Aleksandrov iniziò a collaborare con Hopf a Gottinga nel 1926. In precedenza, Hopf, come parte del suo programma di dottorato all'Università di Berlino, aveva lavorato alla classificazione delle 3-varietà semplicemente connesse con curvatura costante. I due trascorsero l'anno accademico 1927-28 a Princeton. Aleksandrov ottenne una cattedra di professore ordinario all'Università di Mosca nel 1929. Quello stesso anno, a Hopf venne offerta una nomina a professore assistente a Princeton, ma lui scelse di rimanere in Europa e, nel 1931, ricevette una cattedra a Zurigo. Era chiaro che, sia pur timidamente, l'internazionalismo stava cercando di rinascere dalle ceneri del periodo interbellico. Per quanto ci riguarda, comunque, la cosa più importante è che la loro piccola bibbia enunciava la congettura di Poincaré già nella stessa introduzione.

L'emergere della matematica negli Stati Uniti

James W. Alexander — l'americano a Parigi — era un allievo del grande Oswald Veblen. Il fatto che entrambi i matematici fossero americani era un segnale che indicava che negli Stati Uniti c'era stato un profondo cambiamento. Prima dell'alba del XX secolo, nessuna università americana avrebbe potuto seriamente affermare di essere di livello internazionale, e nessun cittadino americano avrebbe potuto ricevere un'adeguata formazione matematica senza andare all'estero.[16] Se Riemann e Poincaré avessero compiuto i loro studi negli Stati Uniti, non sarebbero potuti diventare quei grandi che conosciamo. Questa situazione sarebbe però cambiata nel nuovo secolo, e la matematica non sarebbe più stata la stessa.

Tuttavia, alcuni dei caratteri distintivi del sistema educativo superiore americano erano già presenti all'inizio del secolo. Nel 1892, una commissione d'alto livello presieduta dal rettore di Harvard bocciò l'istituzione di standard nazionali per le scuole secondarie e, per estensione, di standard d'ammissione all'istruzione post-secondaria. Alla fine del XIX secolo, gli Stati Uniti avevano un enorme numero e varietà di istituzioni di insegnamento superiore, sia pubbliche sia private. I trent'anni successivi alla Guerra civile avevano visto un'ingente crescita della ricchezza, accompagnata dal più grande sviluppo nella formazione superiore mai verificatosi nell'intera storia nazionale. Furono fondate nuove istituzioni statali, assieme a college femminili e college per gli afro-americani. Queste istituzioni avevano bisogno di docenti. Inoltre, gli americani erano ambiziosi e si rendevano conto della necessità di strutture di insegnamento e di ricerca post-laurea. Alcune delle università più vecchie iniziarono a sperimentare programmi di dottorato modellati sullo stile tedesco[17] e vennero fondati nuovi centri per gli studi di specializzazione. La qualità, però, lasciava a desiderare; gli americani non erano riusciti a creare dei programmi di specializzazione veramente validi, almeno per quanto riguardava la matematica. I matematici sono un po' come i chip dei computer: per ottenerne qualcuno di qualità eccellente, occorre produrne tantissimi di buona qualità. Nel caso dei matematici, poi, è anche utile che quelli molto abili abbiano la capacità di riconoscere

e incoraggiare il talento.

Fu a Chicago che emerse la giusta combinazione di ricchezza, talento, fortuna e impegno. I battisti americani e la cittadinanza di Chicago avevano deciso di fondare un ateneo nella città, un proposito che venne messo in atto dal creatore e direttore generale della Standard Oil, John D. Rockefeller, un devoto battista. Fin dalla sua nascita, l'Università di Chicago non si limitò agli insegnamenti accademici di base, ma considerò come propria missione il progresso della conoscenza attraverso la ricerca e la formazione post-laurea. Rockefeller assunse come rettore William Rainey Harper, un professore della facoltà di teologia di Yale. Persino in un'epoca di grandi rettori universitari, Harper seppe distinguersi come un amministratore lungimirante e particolarmente attento alla qualità e alle cose fondamentali. Egli assunse — facendolo arrivare da Yale — un giovane di talento originario del Midwest americano, E. H. Moore, e i due lavorarono assieme per creare un programma di ricerca matematica di prim'ordine. Arricchirono — grazie, in parte, a una razzia ai danni della rivale Clark University che viene amaramente ricordata ancora oggi — la facoltà di matematica di due immigrati tedeschi, entrambi ex allievi di Klein. L'atmosfera che si creò era elettrizzante e il dipartimento di matematica di Chicago emerse per la sua stupefacente produttività, sia dal punto di vista del numero di saggi di ricerca, sia — soprattutto — per aver dato i natali alla comunità matematica degli Stati Uniti. L'unica rivale di Chicago, che però le si avvicinava soltanto nel campo dell'analisi, era Harvard, dove insegnavano altri due ex studenti di Klein.[18] I ricercatori formatisi a Chicago successivamente lavorarono per costruire i più grandi dipartimenti di matematica di tutto il Paese.[19]

Due degli allievi di Moore, Oswald Veblen (1880-1960) e George D. Birkhoff (1884-1944), avevano studiato a Harvard e avevano conseguito il dottorato presso l'Università di Chicago: Veblen nel 1903 e Birkhoff nel 1907. Dopo aver trascorso due anni a Chicago come assistente, Veblen si trasferì a Princeton nel 1905, andando a occupare una delle cattedre che l'allora rettore dell'ateneo (e futuro presidente degli Stati Uniti), Woodrow Wilson, aveva istituito nel tentativo di innalzare il livello della ricerca portata avanti dall'università. Nel 1910, Wilson era diventato governatore dello Stato del New Jersey, il capo del dipartimento di matematica Henry Fine era diventato decano dei docenti e Veblen era stato nominato professore ordinario. Nel 1912, Birkhoff abbandonò il proprio posto di professore assistente a Princeton per trasferirsi a Harvard.

Anche se era stato Klein a formare i vecchi matematici di Chicago e Harvard, fu comunque Poincaré ad accendere l'immaginazione dei giovani. Veblen aveva presentato una tesi sugli assiomi della geometria, ma negli anni successivi al suo dottorato si spostò nel campo della topologia e della relatività. Il suo primo saggio in materia, apparso nel 1905, coniugava gli assiomi della geometria con la topologia del piano.[20] Con il suo libro del 1922, Veblen introdusse le idee topologiche di Poincaré nella comunità matematica americana. Birkhoff lesse per suo conto il lavoro di Poincaré sui sistemi dinamici e rimase molto affascinato da come lo studioso francese si era servito di metodi topologici per studiare sistemi di equazioni differenziali. Nel 1913, Birkhoff divenne famoso per aver dimostrato l'ultimo teorema geometrico di Poincaré, quel teorema che lo stesso autore non era stato in grado di provare e che aveva pubblicato con riluttanza, come una semplice congettura, l'anno della sua morte (1912). A Gottinga, la notizia che questo teorema era stato dimostrato da un americano venne accolta con incredulità.

Sia Birkhoff sia Veblen lavorarono instancabilmente nell'interesse della matematica. Il primo divenne vicepresidente della Società matematica americana nel 1919 e decano della facoltà di arti e scienze di Harvard nel 1936. La sua influenza matematica fu enorme e alcuni dei suoi allievi divennero matematici destinati a essere ricordati negli anni. Per quanto riguarda Veblen, fu lui, in larga misura, a fare di Princeton uno dei più grandi centri universitari del mondo per la ricerca matematica. Il dipartimento si concentrava su un ristretto numero di campi di forte attualità: topologia, geometria differenziale, fisica matematica e logica matematica. Al tempo dello scoppio della Prima guerra mondiale, nel campo della topologia Princeton aveva già iniziato a rivaleggiare con istituzioni europee del calibro di Gottinga e delle due università viennesi. Verso la fine degli anni Venti, non c'era più gara: Princeton era senza alcun dubbio la prima istituzione del mondo. Veblen comprese l'importanza di raccogliere finanziamenti dagli ex studenti e da fonti private, ed

ebbe ottimi risultati su entrambi questi fronti.[21] Supervisionò la costruzione di un nuovo edificio per il dipartimento di matematica, che divenne come un magnete per la comunità scientifica internazionale. Veblen ebbe un ruolo chiave nella progettazione dell'Istituto per gli studi avanzati e nella scelta di fondarlo a Princeton. Nel 1932, rassegnò le dimissioni dalla cattedra di ricerca che aveva tenuto all'università e divenne il primo professore dell'Istituto per gli studi avanzati.

Sia Veblen sia Birkhoff godevano di una fama internazionale e avevano contatti in tutta Europa. Tuttavia, nel suo impegno per creare la comunità matematica americana, Birkhoff tendeva a cadere in una sorta di protezionismo, sostenendo nei suoi scritti che gli sforzi volti a trovare ai matematici in fuga dall'Europa una cattedra nelle istituzioni statunitensi venivano a sottrarre ai cittadini americani i pochi posti disponibili.[22] Tragicamente, oltre che stupidamente, egli cercò inoltre di limitare il numero di cattedratici ebrei a Harvard e altrove. Veblen, invece, creò una comunità matematica molto più variegata. Princeton si preoccupava di coltivare i giovani, raccogliendoli nel vivaio dei propri laureati, ma seppe anche approfittare della situazione venutasi a creare in Europa con l'avvento del nazismo per assumere Albert Einstein, John von Neumann e Hermann Weyl. Verso la metà degli anni Trenta, Princeton poteva vantare cinque topologi leggendari[23] e molti giovani promettenti. Gli Stati Uniti ce l'avevano fatta: studiare seriamente la topologia significava trascorrere un po' di tempo a Princeton.

Oltre ad Alexander, un precedente brillante acquisto di Veblen fu Solomon Lefschetz (1884-1972), un ebreo russo emigrato da Parigi nel 1905. Lefschetz aveva lavorato come ingegnere per la Westinghouse Electric Company finché perse entrambe le mani nell'esplosione di una caldaia e dovette abbandonare l'ingegneria applicata. Tornò allora a studiare e, nel 1911, conseguì il dottorato in matematica presso la Clark University. Trascorse quindi due anni all'Università del Nebraska e undici presso quella del Kansas. Lontano dalla corrente predominante della matematica, Lefschetz lavorò in condizioni di relativo isolamento e spinse le applicazioni della topologia alla geometria algebrica molto oltre rispetto a quanto aveva fatto lo *stesso* Poincaré. Si trasferì a Princeton nel 1924. Appariscente, emotivo, con due mani di metallo ricoperte da guanti di plastica nera, vestito malamente, Lefschetz incarnava un ideale lontano da quello di molti suoi colleghi più eruditi. Tendeva a lasciarsi prendere dall'entusiasmo nelle conversazioni matematiche, seguendo con eccitazione lo sviluppo delle idee per vedere dove conducevano, senza badare a chi gli stava attorno o alle convenzioni sociali.[24] Durante i ricevimenti, la gente cercava di stargli alla larga.

Lefschetz aveva quattro anni più di Alexander e, col passare del tempo, tra i due si sviluppò un sentimento di inimicizia. Alexander era ricco e disinvolto nelle relazioni sociali, due qualità che a Lefschetz mancavano. Alexander se la prese ritenendo che l'altro si fosse appropriato delle sue idee senza riconoscerne la paternità. Lefschetz era una persona estremamente impulsiva, mentre Alexander aveva una singolare mancanza di ambizione. Lefschetz non dimenticò mai che Veblen aveva scelto Alexander, e non lui, per il primo incarico di docenza all'Istituto per gli studi avanzati, sebbene lui avesse ottenuto la cattedra di Veblen, che non prevedeva compiti di insegnamento.

Ciononostante, Lefschetz ebbe grandissimi meriti. Era aperto a tutti, la sua passione per la matematica era enorme e i suoi standard di ricerca elevati. Contribuì a portare Princeton all'eccellenza. Ma era anche una persona intrattabile. Quando andava nell'ufficio del decano, doveva sempre portare con sé un collega più diplomatico. La scena era più o meno sempre la stessa: Lefschetz riteneva di avere ragioni inattaccabili a sostegno di ulteriori assunzioni, ma il decano era di parere opposto. Lefschetz iniziava ad agitarsi e volavano i primi insulti. Il collega più diplomatico doveva allora intervenire per trascinare fuori Lefschetz prima che le relazioni fra l'amministrazione e il dipartimento di matematica venissero irreparabilmente compromesse.

La scuola russa

Nel campo della ricerca matematica, la Russia aveva una forte tradizione che risaliva all'Accademia di San Pietroburgo, fondata nel 1725. La controparte russa di Veblen era Nikolai Nikolaevič Luzin (1883-1950). Questi formò una generazione di matematici attraverso il difficile periodo della Prima

guerra mondiale e della Rivoluzione russa, e il suo gruppo di ricerca era scherzosamente noto fra i suoi studenti come la «Luzitania». Esso includeva diversi topologi molto abili che avrebbero contribuito a fare dell'Università di Mosca uno dei centri di matematica più attivi del mondo. Il suo primo studente fu Pavel Aleksandrov, che abbiamo già avuto modo di incontrare. Un altro fu Andrej Kolmogorov (1903-87), uno dei matematici più famosi di tutti i tempi. Iniziò a produrre risultati di rilievo quando ancora non era neppure laureato. Pubblicò otto articoli durante il suo ultimo anno di corso, e quando conseguì il dottorato ne aveva già pubblicati 18. Molti di questi articoli sono ancora considerati come dei classici. Aleksandrov e Kolmogorov divennero grandi amici. Nel 1935, comprarono una piccola casa fuori Mosca, nel villaggio di Komarovka, dove ospitarono molti colleghi. Nel 1938, Aleksandrov, Kolmogorov e diversi altri matematici dell'Università di Mosca entrarono a far parte dell'Accademia delle scienze (l'Istituto Steklov), mantenendo al contempo le loro cattedre universitarie.

Nel 1935, presso l'Università di Mosca si tenne il primo Congresso internazionale dedicato interamente alla topologia. Vi parteciparono otto americani, in massima parte di Princeton. Vennero annunciate diverse grandi scoperte. La più sorprendente riguardava un nuovo insieme di strutture algebriche associate a varietà e altri spazi topologici. Queste strutture, chiamate «anelli di coomologia», erano una sorta di immagine speculare dei gruppi di omologia che erano stati definiti da Poincaré, ma erano associati a due operazioni algebriche anziché alla singola operazione dei gruppi di omologia. Tali strutture portavano informazioni topologiche più delicate e rappresentavano il più grande progresso compiuto dopo Poincaré. Esse, inoltre, vennero a chiarire il senso di alcune misteriose affermazioni fatte dallo stesso matematico francese.[25] La scoperta fu annunciata da Kolmogorov. Nell'intervento successivo al suo, Alexander confessò che anche lui aveva ottenuto risultati praticamente identici e che voleva parlare della stessa cosa. Entrambi avevano già presentato i loro scritti per la pubblicazione.

Purtroppo, l'anno successivo il congresso vide l'intensificarsi delle purghe staliniane. Luzin venne attaccato attraverso le pagine della «Pravda». Fu accusato di propaganda antisovietica e di aver pubblicato i suoi importanti articoli all'estero anziché su riviste russe. Riuscì a scamparla per miracolo. Dovette dimettersi dall'Università di Mosca, ma conservò il suo posto all'Accademia delle scienze. L'effetto di questa persecuzione fu che i matematici sovietici smisero di mandare i loro scritti alle riviste occidentali e iniziarono a pubblicare esclusivamente in Russia, su riviste in lingua russa. Negli anni a venire, questo isolamento avrebbe danneggiato tanto i matematici occidentali quanto quelli sovietici.

La Germania dopo la guerra

Quando scoppiò la Prima guerra mondiale, Gottinga venne progressivamente a svuotarsi man mano che gli uomini venivano richiamati al fronte uno dopo l'altro. Al termine del conflitto, sotto la guida di Richard Courant, l'Università iniziò a riacquistare un po' del suo precedente lustro. La Germania versava in enormi problemi economici, ma la guerra aveva cancellato ogni dubbio circa le potenzialità della scienza e della tecnologia nel creare una capacità industriale e nel progettare e costruire armamenti. Venne eretto un nuovo edificio che divenne il centro dell'intensa vita matematica.

Dopo la morte di Poincaré, Hilbert era il più grande matematico del mondo. Egli si era rifiutato di firmare quella dichiarazione che Klein aveva invece sottoscritto, una scelta che gli era costata parecchia disaffezione da parte degli studenti e dei cittadini di Gottinga. Ma quell'episodio sarebbe stato solo un piccolo assaggio di quanto sarebbe avvenuto in seguito. La crisi economica indotta dal pagamento delle riparazioni di guerra e dalla recessione globale aveva radicalizzato l'elettorato tedesco. Nelle elezioni del Reichstag del 1932, il Partito nazionalsocialista ottenne un grande successo. Il presidente von Hindenburg nominò cancelliere Adolf Hitler. L'orrore ebbe inizio e le luci si affievolirono. Alle università fu ordinato di allontanare da ogni incarico di insegnamento tutte le persone di sangue ebreo. Richard Courant, Edmund Landau, Emmy Noether, Paul Bernays

furono tra le vittime del provvedimento. In seguito, il criterio di espulsione si sarebbe allargato, venendo a includere anche coloro che avevano un avo o un coniuge ebreo. In occasione di un banchetto, Hilbert, che era seduto a fianco del ministro nazista dell'Educazione, si sentì chiedere: «E come va la matematica a Gottinga, ora che è stata liberata dall'influenza ebraica?».

«La matematica a Gottinga?» replicò Hilbert. «Veramente, non esiste più.»[26]

13
Dimensioni superiori

La Seconda guerra mondiale, che sopraggiunse appena vent'anni dopo la Prima, devastò un'altra generazione di europei. Anche gli Stati Uniti subirono senza dubbio delle perdite, ma decisamente non dell'ordine di grandezza di quelle che si contarono in Europa. L'America emerse dalla guerra animata da ottimismo e idealismo.

Com'era accaduto durante la Prima guerra mondiale, molti matematici contribuirono allo sforzo bellico e si dedicarono ad aree di ricerca più immediatamente applicabili alle esigenze militari. Essi giocarono un ruolo di primaria importanza nello sviluppo del radar, della bomba atomica e dell'energia nucleare, della codifica e della decodifica dei messaggi, degli aerei a reazione e dell'aerodinamica. Da un lato, il coinvolgimento nella guerra aveva tolto ai matematici la loro innocenza e, in seguito, molti di loro sarebbero rimasti turbati dalle implicazioni etiche di ciò che avevano prodotto. D'altro alto, nessuno poteva dubitare dell'efficacia della matematica e della scienza, e il successo dei matematici aveva tremendamente alzato la posta nella ricerca. La Fondazione nazionale per la scienza venne istituita nel 1952 con la missione di sostenere la scienza di base. Diverse altre agenzie federali operanti negli Stati Uniti iniziarono a finanziare la ricerca.
I soldati di ritorno dal fronte, approfittando dei privilegi concessi — con il *GI Bill of Right* del 1944 — a chi aveva prestato servizio in guerra, inondarono le università nazionali, innescando il più grande boom nell'istruzione superiore dai tempi immediatamente successivi alla Guerra civile. In accordo col tipico costume americano, alla più profonda lungimiranza faceva da contrappeso la più ottusa ristrettezza mentale. Il Piano Marshall finanziò la ricostruzione dell'Europa, e una decisione della Corte Suprema mise fuorilegge la segregazione nelle scuole pubbliche americane, creando le condizioni — fino ad allora assenti — per l'accesso alle scuole primarie e secondarie dei ragazzi di tutte le razze, di entrambi i sessi e di ogni condizione economica. Ma poi sopraggiunse la Guerra fredda, e il Comitato della Camera per le attività antiamericane minacciò di estinguere la libertà di pensiero.

Quattro e più dimensioni

A prima vista, sembrava che la matematica pura — e la topologia in particolare — stessero attraversando un momento di stasi. Osservando con sufficiente attenzione si poteva constatare che c'era dell'attività, ma la guerra aveva disgregato la rete di comunicazioni. I singoli individui continuavano a riflettere ed elaborare, ma ci volle tempo prima che le cose tornassero alla normalità, e le vite e le università riprendessero il loro corso.

La diga crollò verso la fine degli anni Cinquanta. Nel 1960, il Paese stava vivendo il periodo più produttivo e più esplosivo di tutta la storia del progresso matematico, un periodo assolutamente senza pari: non si era mai visto nulla di simile, né nelle corti babilonesi, né nelle scuole greche di Atene e Alessandria, né nel Rinascimento o nell'Illuminismo europeo, né nella Germania del XIX secolo. L'esplosione ebbe luogo in tutte le regioni della Terra e toccò quasi tutti gli ambiti della matematica. Le aree centrali della geometria, della topologia, dell'algebra e dell'analisi andarono incontro a un'espansione enorme, e ai loro margini e al loro interno fiorirono nuove discipline che crebbero fino a diventare campi autonomi, con i loro potenti metodi e i loro spettacolari risultati. Il rapido succedersi dei progressi nell'elaborazione dei dati, nelle scienze informatiche e nella

matematica applicata alimentarono l'impressionante crescita della conoscenza, e ne furono a loro volta alimentati.

Dal punto di vista della topologia e della congettura di Poincaré, l'evento che sembrò cristallizzare il cambiamento fu un'inattesa scoperta compiuta da John Milnor nel 1956. Milnor aveva conseguito la laurea di primo livello a Princeton nel 1951 e il dottorato nel 1954; in seguito, era rimasto all'interno dell'università entrando a far parte del corpo docente. Quando era ancora uno studente, aveva risolto un vecchio problema sui «nodi matematici» (curve chiuse in uno spazio tridimensionale).[1] Narra la leggenda che Milnor aveva erroneamente creduto che si trattasse di un problema lasciato come compito a casa. Pochi anni dopo, nel 1956, quando non aveva ancora compiuto venticinque anni, Milnor si servì di alcuni recenti lavori del matematico francese René Thom per mostrare che c'erano più modi fondamentalmente differenti di fare calcolo infinitesimale su una sfera 7-dimensionale. Questo risultato catturò ovunque l'immaginazione dei matematici e aprì un intero nuovo mondo.

La questione merita una breve spiegazione. Così come esistono spazi euclidei di ogni dimensione, allo stesso modo ci sono anche sfere di ogni dimensione. La comune sfera bidimensionale può essere pensata come l'insieme dei punti che si trovano a una determinata distanza — mettiamo che sia pari a 1 — dall'origine nel 3-spazio, e la 3-sfera come l'insieme dei punti che si trovano a distanza 1 dall'origine nello spazio 4-dimensionale. (Qualora lo spazio 4-dimensionale vi dovesse sembrare qualcosa di irreale, ricordatevi che un punto dello spazio 4-dimensionale è dato semplicemente dall'indicazione di quattro numeri, e lo spazio 4-dimensionale è soltanto l'insieme di tutte le 4-ple di numeri reali.) Analogamente, la 7-sfera è l'insieme dei punti situati a distanza 1 dall'origine nello spazio 8-dimensionale (ossia, lo spazio costituito da tutte le 8-ple di numeri reali), o qualunque insieme di punti omeomorfo a questo. Proprio come nel caso delle sfere bi e tridimensionali, la sfera 7-dimensionale esiste indipendentemente dallo spazio euclideo in cui è immersa. In termini generali, per ogni numero intero positivo *n,* una sfera *n*-dimensionale (o *n*-sfera) è qualunque insieme omeomorfo all'insieme dei punti che si trovano a una determinata distanza dall'origine nello spazio euclideo di dimensione $n+1$.

Ogni volta che abbiamo una varietà, abbiamo anche un'altra classe di oggetti matematici, chiamati funzioni, su quella varietà. Una funzione è qualunque regola che assegna dei numeri ai diversi punti sulla varietà: differenti assegnazioni equivalgono a funzioni differenti. Il calcolo infinitesimale è lo studio delle rapidità di variazione, dette «derivate», delle funzioni. Esso studia i modi in cui le funzioni possono cambiare e come è possibile determinare una funzione conoscendo soltanto le sue rapidità di variazione. C'è un modo canonico di fare calcolo infinitesimale sullo spazio euclideo e, trattandosi di un sottoinsieme dello spazio euclideo 8-dimensionale, c'è un modo ben definito di fare calcolo infinitesimale sulla 7-sfera. Si definiscono le rapidità di variazione delle funzioni e le derivate di altri oggetti semplicemente considerandole nel superiore spazio 8-dimensionale.

Astrattamente, tuttavia, muovendoci con lo stesso preciso spirito con cui Riemann aveva notato che la geometria nasceva da una struttura addizionale — che definiva la distanza — su uno spazio, tutto ciò di cui abbiamo bisogno per fare calcolo infinitesimale è una definizione coerente di variazione di primo grado, ossia lineare. Prima di procedere, due osservatori devono accordarsi su ciò che può essere definito retto e ogni accordo di questo tipo è chiamato «struttura differenziabile». Milnor scoprì che esistevano diverse strutture differenziabili differenti sulla 7-sfera.[2] Ci potevano essere due 7-sfere che erano omeomorfe (ossia, che potevano essere messe in una corrispondenza biunivoca continua l'una con l'altra), ma che non potevano essere messe in relazione da una mappa biunivoca la cui rapidità di variazione era ovunque definita e diversa da 0. Si stabilì che non esisteva un unico modo di fare calcolo infinitesimale sulla 7-sfera, ce n'erano 28: tutti diversi e tutti non equivalenti.

Le argomentazioni di Milnor erano sbalorditive. Egli coniugò la topologia e l'analisi in un modo del tutto inaspettato, e nel far questo diede inizio alle ricerche nel campo della topologia differenziale. Inoltre Milnor, con la sua prosa sobria, dimostrò di essere uno degli scrittori matematici più eleganti di tutti i tempi. Il suo articolo in cui tratta nel dettaglio le diverse strutture

differenziabili sulla 7-sfera è lungo appena sei pagine.[3] E un articolo pieno di brillanti intuizioni. Milnor usa una tecnica ingannevolmente semplice per determinare se una varietà è una sfera,[4] e studia le strutture differenziabili analizzando le varietà 8-dimensionali i cui bordi sono costituiti dalle sfere in questione.

Le scoperte di Milnor diedero il via a una serie di nuovi lavori e applicazioni, ognuno più spettacolare e più straordinario del precedente. Qualche anno dopo, Stephen Smale, di Berkeley, sfruttò delle riflessioni che erano state avviate da Poincaré ma poi perfezionate dai topologi americani Marston Morse, dal russo Lev Pontryagin e dallo stesso Milnor, per dimostrare l'analogo della congettura di Poincaré per tutte le sfere di dimensione 5 o superiore. Più precisamente, egli dimostrò che in ogni dimensione *n* con *n* maggiore di 4, una varietà *n*-dimensionale semplicemente connessa che non ha un bordo e che non si estende all'infinito, e che ha la stessa omologia della sfera *n*-dimensionale, è una sfera *n*-dimensionale. (Come ricorderemo, semplicemente connessa significa che ogni ciclo può essere ridotto a un punto e, nella terminologia di Poincaré, che il gruppo fondamentale è l'identità.) Poincaré si era chiesto se ogni varietà tridimensionale semplicemente connessa priva di un bordo e che non si estende all'infinito fosse una sfera tridimensionale.

La ragione per cui l'enunciato della congettura originale di Poincaré sembra più semplice dell'analogo dimostrato da Smale è che Poincaré aveva verificato che, in dimensione 3, dire che una varietà è semplicemente connessa significa dire che l'omologia di questa varietà è la stessa di quella di una sfera. Ciò però non vale quando la dimensione è superiore a tre, e occorre quindi specificarlo esplicitamente come assunzione.

Smale dimostrò anche un importante risultato concernente le proprietà di due varietà che limitano una varietà della dimensione immediatamente superiore alla loro. Questo risultato spinse ancora oltre il lavoro di René Thom. Christopher Zeeman (in Gran Bretagna) e Andrew Wallace e John Stallings (negli Stati Uniti) produssero dimostrazioni profondamente differenti. I matematici scoprirono sfere che non avevano nessuna struttura differenziabile,[5] e un gran numero di altre varietà che ammettevano molte strutture differenziabili diverse.

Le dimensioni superiori erano arrivate. Qualcuno potrebbe pensare che le versioni in dimensioni superiori dei risultati e delle congetture formulate per la terza dimensione siano più difficili. Avere a che fare con tre dimensioni è una cosa decisamente più complessa che avere a che fare con due. Aggiungere ulteriori dimensioni rende le cose molto difficili da visualizzare. Anche solo l'assortimento di differenti varietà e comportamenti viene a moltiplicarsi drammaticamente man mano che le dimensioni crescono. Ciò che ci salva, però, è che c'è più spazio: quello che perdiamo dal punto di vista dell'intuizione geometrica è più che adeguatamente compensato dallo spazio extra concesso per approssimare a piacere funzioni e oggetti matematici dal comportamento difficile con oggetti più semplici e più facilmente trattabili. Le pieghe in una varietà possono essere spianate, e i «punti critici» nelle funzioni possono essere fatti scorrere uno attorno all'altro e spesso cancellati.[6]

I metodi di Smale nell'affrontare le sfere di dimensione 5 e superiori sono del tutto inapplicabili in dimensione 4, per non parlare della dimensione 3. La congettura di Poincaré per sfere di dimensione 4 venne dimostrata vent'anni dopo, nel 1982, da Michael Freedman (dell'Università della California a San Diego; oggi lavora alla Microsoft) usando tecniche completamente differenti. Egli riuscì a classificare tutte le varietà 4-dimensionali compatte semplicemente connesse. Freedman aveva lavorato per otto anni su questo risultato. Rob Kirby, di Berkeley, commentò su «Science» dicendo: «Penso che sia uno dei lavori matematici più affascinanti che io abbia mai visto. Ha un elemento di originalità. Se non l'avesse fatto Freedman, non penso che qualcun altro lo avrebbe fatto in tempi brevi». Quando le tecniche di Freedman vennero combinate con l'egualmente sensazionale lavoro di Simon Donaldson (di Oxford), che stava investigando su determinate equazioni motivate dalla fisica che esistevano su tutte le varietà 4-dimensionali, ne nacquero risultati ancora più sorprendenti. Emerse che sul 4-spazio c'erano infinite strutture differenziabili non equivalenti! In altre parole, ci sono infiniti modi, fra loro incompatibili, di fare calcolo infinitesimale nel 4-spazio. Ciò è in contrasto con quanto avviene in ogni altra dimensione: per ogni dimensione tranne la quarta, c'è una sola struttura differenziabile sullo spazio sottostante lo spazio

euclideo di quella dimensione (ossia, sullo spazio delle *n*-ple di numeri reali, dove *n* può essere qualunque numero positivo tranne 4).

Verso la metà degli anni Sessanta, si scoprì che le «sfere esotiche» di Milnor, come vennero chiamate le sfere con strutture differenziabili non standard, si trovano vicino a punti singolari di insiemi definiti da equazioni estremamente semplici. I punti singolari sono punti in corrispondenza dei quali tutte le derivate sono uguali a 0, ed erano da molto tempo oggetto dell'interesse dei matematici. Sbalorditi, gli esperti di quasi tutti i Paesi europei — e del Vietnam, dell'India, dell'Australia, del Canada, del Brasile, dell'Unione Sovietica e degli Stati Uniti — iniziarono a usare tecniche tratte dalla topologia algebrica e differenziale per studiare le soluzioni di vari tipi di equazioni. Milnor presentò alcuni dei risultati che si applicavano ai polinomi, e ne aggiunse molti altri, in un breve, elegante libro che divenne subito un classico.[7] Thom applicò la topologia allo studio dei cambiamenti nei processi biologici.[8] Chimici e fisici iniziarono a usare la topologia per studiare le imperfezioni dei cristalli e altri fenomeni. Negli anni Ottanta, la topologia apparve sempre più di frequente in teorie mirate a trovare un collegamento fra la meccanica quantistica e la relatività generale.

La congettura tridimensionale di Poincaré

Nonostante il gran numero di scoperte matematiche, la congettura originaria di Poincaré continuava però a rimanere irrisolta, nonché fonte di esasperazione. Un tempo, le varietà di dimensione superiore a tre sembravano qualcosa di esoterico. Nel 1982, però, si sapeva ormai che qualunque varietà di dimensione superiore a tre che condividesse le proprietà più ovvie possedute da una sfera era, di fatto, una sfera. Ma lasciamo da parte queste dimensioni superiori. Che cosa possiamo dire, invece, a proposito della dimensione 3? L'universo è una varietà tridimensionale. Viviamo al suo interno. Se ogni ciclo tracciato nell'universo può essere ridotto a un punto, possiamo asserire che esso è una sfera?

É difficile immaginare una domanda più semplice di questa intorno all'universo. A differenza delle nuove scoperte sulle varietà di dimensioni superiori, la sua comprensione non richiede complessi apparati matematici. Cosa ancora peggiore da un punto di vista psicologico, c'erano diversi approcci alla congettura di Poincaré che esercitavano un richiamo ossessivo e che promettevano di ripagare gli sforzi compiuti.[9] Nel I960, numerosi matematici avevano ormai trascorso 20 o più anni della loro vita lavorando sulla congettura di Poincaré. Avevano dimostrato molte cose, ma nessuno di loro era stato in grado di provare che fosse vera, o falsa.

Ciò non significa che non ci fossero dei progressi. Ralph Fox — supervisore di Milnor e uno dei più grandi studiosi della teoria dei nodi di quegli anni — aveva invitato a Princeton un matematico allora sconosciuto, Christos Papakyriakopoulos (1914-76). «Papa» — com'era familiarmente chiamato — era nato ad Atene nell'anno dello scoppio della Prima guerra mondiale e si era dottorato all'Università di Atene nel 1943.[10] Nel 1944 si era unito a un gruppo di partigiani per respingere gli invasori nazisti; mentre viveva nascosto nelle campagne, insegnava in una scuola elementare. Nel 1945 ritornò ad Atene e venne chiamato a lavorare al Politecnico nazionale Metsovion, un incarico che fu però costretto ad abbandonare nel 1946, allo scoppio della guerra civile. Nel frattempo, Papa continuò a lavorare sulla topologia delle dimensioni inferiori. Mandò a Fox una presunta dimostrazione del lemma di Dehn, quel risultato che Dehn aveva creduto di aver provato nel 1910, ma nel quale era stato poi individuato un errore 19 anni dopo, nel 1929. Né Dehn, che era riuscito per miracolo a fuggire dalla Germania sulla transiberiana,[11] né nessun altro erano stati in grado di correggere la dimostrazione. Fox trovò un errore anche nella prova di Papa, ma ne rimase comunque favorevolmente colpito. Su invito di Fox, Papa partì per Princeton nel 1948 e non fece più ritorno in Grecia (tranne che per un breve viaggio nel 1952, alla morte del padre). La polizia politica greca gli diede la caccia negli Stati Uniti cercando di convincere le autorità americane per l'immigrazione a espellerlo dal Paese, ma Princeton gli diede rifugio, offrendogli uno stipendio e un ufficio.

La generosità dell'ateneo fu ampiamente ripagata. Nel 1957, Papa dimostrò un risultato dall'importanza critica, il cosiddetto «teorema del cappio», seguito da una dimostrazione straordinariamente ingegnosa (e corretta) del lemma di Dehn.[12] Papa si era servito di una nuova costruzione, oggi nota come la «costruzione della torre», che riusciva perfettamente ad aggirare le precedenti difficoltà. In quel periodo, gli specializzandi di Princeton si erano divertiti a scrivere delle filastrocche di cinque versi sui matematici del dipartimento. Fu Milnor, sbalordito, a scrivere la seguente su Papakyriakopoulos:

Il perfido lemma di Dehn
ogni topologo fece impazzire
finché Christos Papa
Kyriakopoulos
lo dimostrò senza colpo ferire.

L'ultimo verso si riferisce alla costruzione della torre utilizzata da Papa.

Verso la fine degli anni Cinquanta, sembrava che tutti i topologi avessero preso di mira la congettura di Poincaré, determinati a conquistarla. Rudolph H. Bing, un frutto della forte scuola di topologia del Midwest americano fondata dall'allievo di E. H. Moore (e di Veblen) Robert Lee Moore, passò gli anni accademici a partire dal 1957 all'Istituto per gli studi avanzati. Egli aveva lavorato a procedimenti analoghi alla chirurgia di Dehn nei quali si inserivano dei tori solidi all'interno di cubi con buchi annodati, creando così delle 3-varietà. Si credeva che alcune delle varietà risultanti avrebbero potuto offrire dei controesempi alla congettura di Poincaré. Bing non escluse del tutto questa possibilità, ma dimostrò che certe classi di nodi non potevano fornire controesempi. Egli, tuttavia, giunse quasi a ritirare il suo articolo quando nell'Istituto iniziarono a circolare voci secondo le quali la congettura era crollata. Erano in circolazione due presunte prove fra loro differenti. Entrambe, però, contenevano degli errori che non fu possibile sistemare. Una di esse, preparata da un matematico giapponese, venne pubblicata nel 1958, ma non passò il vaglio della critica.[13]

Papa concentrò tutti i propri sforzi nel dimostrare la validità della congettura, pubblicando alcuni risultati parziali nel 1963.[14] Fino alla sua morte, avvenuta nel 1976, egli consacrò la sua vita alla ricerca, arrivando nel suo ufficio la mattina presto e uscendone dopo le cinque. Faceva una pausa soltanto per il pranzo, per il tè — quando dava una scorsa al «New York Times» — e per qualche seminario. Alla fine, però, la congettura ebbe la meglio anche su di lui.

La vita di Papa è stata romanzata nel libro di Apostolos Doxiadis *Uncle Petros and Goldbach's Conjecture*.[15] Il romanzo racconta la storia di un individuo brillante, Petros Papachristos, ossessionato da un famoso problema matematico. (Il problema in questione è la «congettura di Goldbach», l'ancora indimostrata affermazione secondo cui ogni numero pari è la somma di due numeri primi, cosa che risulta molto più facile da spiegare della congettura di Poincaré.) Dopo un inizio di carriera molto promettente, Petros allontana da sé ogni contatto umano e continua a lavorare concentrandosi esclusivamente sulla congettura. Alla fine, lascia il proprio lavoro accademico e ritorna in Grecia, dove i suoi fratelli non gli perdonano mai di aver sprecato le sue potenzialità intellettive. Petros, infine, muore considerando la propria vita un fallimento perché non è riuscito a dimostrare il risultato.

La congettura di Poincaré, in effetti, è stata esacerbante per molti. All'inizio degli anni Sessanta, l'unica cosa chiara su di essa era che nessuno aveva idea se fosse vera oppure no. A un convegno tenutosi in Georgia nel 1961, Fox presentò uno scritto in cui suggeriva un'altra via per cercare dei controesempi. Nel 1964, Bing scrisse un accurato articolo suggerendo ulteriori possibili approcci.[16] John Stallings, poi, scrisse un articolo su come *non* provarla.[17]

I progressi sul piano delle dimensioni superiori avevano alzato ulteriormente la posta sulla formulazione classica della congettura di Poincaré. Tuttavia, essi ebbero pure l'effetto di condurre i matematici fuori strada. Anche se la verità della congettura era molto in dubbio, nel 1980 l'opinione preponderante era che essa fosse una questione puramente topologica. Quasi nessuno si sognava che avesse qualcosa a che fare con la geometria.

Thurston

Gli anni Settanta, tuttavia, videro una rinascita della geometria, in gran parte per merito di un singolo individuo, Bill Thurston. Thurston conseguì la sua laurea di primo livello presso il New College di Sarasota (un'istituzione leggermente controculturale) nel 1967, e il Ph.D. a Berkeley nel 1972 (sotto la guida di Morris Hirsch e Stephen Smale). Dopo un anno presso l'Istituto per gli studi avanzati e un anno come assistente al Mit, nel 1974 venne nominato professore ordinario a Princeton.

Nel XX secolo la geometria differenziale era fiorita, in parte per via delle sue connessioni con la relatività generale. Alla geometria nel senso di Klein, Poincaré e Hilbert, però, non era andata altrettanto bene. Thurston cambiò radicalmente la situazione. La sua fu la più fertile e originale immaginazione geometrica dai tempi di Riemann. Thurston si chiese come sarebbe stato vivere in una varietà tridimensionale. Che cosa vedremmo se vivessimo in un 3-toro popolato da un certo numero di oggetti? In che modo influirebbe il rapporto fra la sua grandezza e la nostra? Che cosa potremmo dire a proposito della velocità della luce in rapporto alla grandezza della varietà? Che cosa vedremmo se qualcuno si allontanasse da noi?

Nessuno si immaginava che nella terza dimensione fosse possibile ottenere qualcosa di simile a quella stupefacente sintesi che Klein e Poincaré avevano fatto a gara per raggiungere nell'ambito di due dimensioni. Le cose erano troppo confuse anche soltanto per sperare che in tre dimensioni ci fosse un analogo di quel fatto, apparentemente miracoloso, per cui ogni superficie ha un'unica geometria naturale. Le varietà tridimensionali erano di gran lunga troppo numerose, e l'unico schema comune sembrava essere l'assenza di uno schema. Era difficile capire da dove iniziare. C'erano, naturalmente, i diretti analoghi dei tre tipi di geometria che si ritrovano in dimensione 2 e gli spazi modello semplicemente connessi in cui esistevano. La metrica usuale sul 3-spazio ordinario dava a quest'ultimo la geometria del 3-spazio euclideo, che era piatta. La 3-sfera aveva una geometria sferica ed era stata descritta da Riemann. L'interno della palla unitaria nel 3-spazio aveva una geometria naturale iperbolica, che Poincaré aveva descritto nel passo che abbiamo citato nel capitolo 10. Dehn e alcuni dei topologi tedeschi avevano compreso che alcune 3-varietà compatte portavano una geometria iperbolica, e si conoscevano altre varietà che portavano geometrie sferiche e piatte. Ma le geometrie sulle varietà sembravano qualcosa di raro, una sorta di curiosità.

In dimensione 2, varie definizioni differenti venivano a coincidere. Avere una curvatura costante equivale ad avere la stessa regola per misurare lunghezze e angoli a tutti i punti e in tutte le direzioni. In dimensione 3, invece, c'erano diverse possibili definizioni, e non tutte erano in accordo. Senza lasciarsi scoraggiare, Thurston trovò una definizione provvisoria, ora largamente accettata, e mostrò che in dimensione 3 c'erano otto, e soltanto otto, differenti geometrie, al posto delle tre che si ritrovavano in dimensione 2. In aggiunta alle geometrie sferica, piatta e iperbolica, su spazi molto particolari esistevano alcuni tipi di geometrie ibride.[18]

Nei suoi primi anni da studente universitario, Thurston aveva trascorso molte ore a elaborare esempi di varietà e geometrie su di esse. Nella sua tesi di dottorato, aveva studiato dei metodi per decomporre 3-varietà in fogli impilati che si avviluppavano l'uno attorno all'altro in modi complessi.

Anche solo il semplice parlare di tutte le varietà tridimensionali dotate di una geometria naturale sembrava un'impresa disperata. Era facile costruire controesempi che mostravano la falsità delle speranze ingenue che qualcuno poteva nutrire. Tuttavia, Thurston congetturò che qualunque varietà tridimensionale poteva essere scomposta in pezzi, tagliando lungo sfere bidimensionali e tori in un modo essenzialmente unico e naturale, e ogni pezzo risultante avrebbe avuto una delle otto geometrie. Egli riuscì a dimostrare che questa congettura era valida per una classe molto grande di 3-varietà. La «congettura di geometrizzazione», come venne da lui chiamata, implica la congettura di Poincaré.[19]

La congettura di geometrizzazione permetteva un'ampia visione delle 3-varietà, ma sembrava

quasi qualcosa di troppo grande, al di fuori della portata umana. Nondimeno, Thurston riuscì a mostrare che la maggior parte (in un senso adeguatamente definito del termine) delle 3-varietà portavano una struttura iperbolica. Questo risultato fu una totale sorpresa. La stessa affermazione è valida anche per le 2-varietà: fatta eccezione per la sfera e il toro, tutte le 2-varietà (orientabili) hanno una geometria iperbolica. Klein e Poincaré lo sapevano già, anche se il risultato non viene solitamente espresso in questo modo. Di certo, però, nessuno aveva sospettato che qualcosa del genere potesse essere vero anche per le 3-varietà.

Le applicazioni furono immediate e affascinanti. Per esempio, una conseguenza era che la regione all'esterno della maggior parte dei nodi (nota come «complemento nodale») nella 3-sfera possiede una metrica che la rende una varietà iperbolica. Anche se il nodo era infinitamente lontano dal punto di vista di un osservatore nella varietà, il volume della regione si rivela essere finito e dà un nuovo numero associato al nodo. Misteriosamente, questi volumi sembrano essere collegati, in qualche modo ancora inesplicato, con la teoria dei numeri.

Prima del lavoro di Thurston, l'unica ragione per pensare che la congettura di Poincaré fosse vera era che nessuno era in grado di realizzare un controesempio. E la cosa peggiore era che quando uno cercava sistematicamente di costruire dei controesempi, spesso rimaneva con la sensazione che non ci fosse nessun valido motivo per ritenere che questi controesempi non potessero esistere. Era una situazione assolutamente frustrante. Dopo Thurston, c'era una ragione a sostegno della possibile verità della congettura di Poincaré. Forse tutte le 3-varietà erano costituite di pezzi che avevano una struttura geometrica.

Come Thom nel 1958, Milnor nel 1962 e Smale nel 1966, anche Thurston vinse la medaglia Fields. La medaglia prende il nome dal matematico canadese John Charles Fields (1863-1932) ed è il premio più ambito che un matematico possa ricevere. Fields aveva lavorato disinteressatamente al servizio della comunità matematica internazionale, sventando la minaccia di un boicottaggio da parte dei matematici francesi nel caso in cui i matematici tedeschi fossero stati invitati al congresso del 1924. Aveva destinato una parte cospicua del suo patrimonio a sovvenzionare proprio quel premio, che venne istituito dopo la sua morte e contro le forti obiezioni di Veblen, il quale pensava che la ricerca avrebbe dovuto trarre la giusta ricompensa da se stessa. I primi premi vennero assegnati nel 1936. Il testamento di Fields specificava che il premio doveva essere assegnato per incoraggiare i giovani matematici. Stando all'interpretazione tradizionale, questa clausola significa che il premio può andare solo a individui che non abbiano ancora superato i quarant'anni di età all'inizio dell'anno in cui si tiene il quadriennale congresso. La Seconda guerra mondiale aveva interrotto i lavori, ma in seguito — a partire dal 1950 — i premi sono sempre stati assegnati ogni quattro anni in occasione dei congressi internazionali. I problemi legati alla Guerra fredda portarono alla posticipazione al 1983 del Congresso di Varsavia durante il quale Thurston ricevette la sua medaglia (in origine, avrebbe dovuto tenersi nel 1982). A causa dei limiti di età, questa era l'ultima occasione per Thurston di ricevere la medaglia.

All'epoca, l'assegnazione del premio a lui suscitò il disappunto di più di una persona. Egli rappresentava la quintessenza del matematico orale. E scorretto dire, come ha fatto qualcuno, che non ha pubblicato abbastanza. Il suo lavoro sulla foliazione, per il quale ha appunto ricevuto la medaglia Fields, era certamente esauriente e documentato con attenzione. Tuttavia, egli pubblicò molto di meno riguardo alle sue ricerche puramente geometriche: un singolo articolo nel «Bulletin of the American Mathematical Society», e una raccolta di appunti di lezioni tenute a Princeton che circolavano di fotocopiatrice in fotocopiatrice e che oggi sono disponibili sul web. I primi capitoli degli appunti vennero riscritti con cura da gruppi di matematici e apparvero sotto forma di un autorevole libro curato da Silvio Levy.[20] Anche se Thurston ha scritto poco, i suoi studenti e i suoi collaboratori hanno pubblicato moltissimo.

Thurston ha riflettuto molto di più di quanto non faccia la maggior parte degli scienziati sull'insolita sociologia della matematica. In uno scritto, egli racconta il proprio rammarico per aver involontariamente ritardato per più di un decennio la ricerca sulle foliazioni delle varietà. Altri matematici meno affermati, riconoscendo la sua abilità, avevano infatti dato per scontato che egli avrebbe spiegato i problemi principali e avevano di conseguenza abbandonato il campo, cercando

altre aree in cui dar prova della loro competenza. Thurston, pertanto, si dispiace del fatto che, anziché far progredire lo studio delle foliazioni, il suo impegno lo ha rallentato.

In geometria, d'altro lato, la sua influenza è stata prodigiosa. Non è raro incontrare geometri e topologi che, dopo una conversazione con Thurston, hanno cambiato completamente il loro modo di vedere un determinato gruppo di problemi. Le sue idee hanno rivoluzionato in modo talmente radicale il nostro modo di pensare alle 3-varietà che anche coloro che non lo hanno mai incontrato si servono abitualmente di concetti e di esempi da lui introdotti. I matematici hanno riabbracciato le idee geometriche, e il campo della topologia delle 3-varietà ha visto un afflusso senza precedenti di giovani ricercatori pronti a utilizzare metodi geometrici per affrontare problemi topologici e algebrici.

Thurston ha dato al servizio della matematica, all'insegnamento e alla riflessione su come la matematica viene insegnata e appresa più di quanto abbia dato qualunque altro matematico del suo livello e della sua relativamente giovane età. Il suo autorevole scritto sulla conoscenza matematica sviluppa più osservazioni penetranti e solleva più questioni interessanti di quanto non faccia nessun altro articolo di lunghezza paragonabile sulla formazione matematica.[21] Le idee di Thurston hanno in parte innescato nella comunità matematica un dibattito molto vivace su dimostrazione e intuizione.[22] Queste discussioni richiamano lo scambio di idee avvenuto, un secolo prima, tra Poincaré e Hilbert (e altri) sulla natura della dimostrazione e dell'intuizione.

Hamilton e il flusso di Ricci

Il lavoro di Thurston diede il via a un'enorme ripresa delle ricerche geometriche. Le strutture geometriche *à la* Thurston sembravano trovare ovunque applicazione. Gli invarianti delle varietà iperboliche iniziarono ad avere un ruolo importante nella topologia e nella geometria algebrica. Nessuno, tuttavia, sapeva come compiere ulteriori progressi sulla congettura di geometrizzazione di Thurston. Erano stati proposti numerosi metodi, ma gli ostacoli erano giganteschi.

Alcune idee promettenti vennero dall'analisi. Nei primi anni Ottanta, molte persone iniziarono a indagare su che cosa succede quando si prende una varietà con una metrica riemanniana e si cerca di «migliorarla» con una qualche sorta di procedura volta ad appianare gli eccessi di curvatura. Per esempio, se la curvatura in corrispondenza di un particolare punto e in una particolare direzione è eccessivamente elevata, possiamo provare a farla diminuire in quella direzione e analogamente, se sembra bassa, possiamo provare ad aumentarla. Con un po' di fortuna, forse potremmo deformare le cose in modo tale che la curvatura in tutte le direzioni in quel punto e nei punti vicini diventi la stessa. Con ancora più fortuna, forse intere regioni della varietà che stiamo considerando svilupperanno una delle geometrie di Thurston, e potremmo così trovare la strada per dimostrare la congettura di geometrizzazione relativamente a quella varietà. La difficoltà consiste nel trovare un modo analiticamente trattabile di articolare questa idea.

All'inizio degli anni Ottanta, Richard Hamilton propose di considerare una varietà con una metrica riemanniana come se fosse fatta, per esempio, di metallo, con variazioni di temperatura da un punto all'altro. Che cosa succede se facciamo fluire la curvatura dalle aree più curve a quelle meno curve, così come il calore fluisce dalle aree più calde a quelle più fredde? Ciò equivale a cambiare la metrica su uno spazio così che le distanze decrescano più velocemente in direzioni lungo le quali la curvatura è più accentuata.[23]

Anche se ciò può suonare plausibile, era necessario risolvere diversi problemi spinosi. La temperatura è qualcosa di molto più semplice della curvatura. In qualunque punto di una varietà, la temperatura è data da un singolo numero. Come abbiamo visto nel capitolo 7, la curvatura in un dato punto è, invece, un oggetto matematico (il tensore di curvatura di Riemann) che assegna un valore a ogni direzione planare passante per quel punto (valore che riflette di quanto le somme angolari di minuscoli triangoli geodetici tendono a deviare da 180 gradi). Occorrono sei numeri differenti per descrivere la curvatura di una 3-varietà, e ancora di più per le varietà di dimensioni superiori. Per quantificare la regola secondo cui il calore fluisce dalle aree più calde a quelle più

fredde, specifichiamo che la temperatura si muove verso la media delle temperature su una piccola sfera attorno al punto. Ciò dà origine alla cosiddetta «equazione del calore». Quello che cerchiamo è un analogo dell'equazione termica che valga per la curvatura. E necessario essere in grado di combinare i diversi numeri che codificano la curvatura in qualcosa che abbia senso indipendentemente dalla scelta delle coordinate, e di scrivere una formula che descriva la rapidità di variazione. Si tratta di un problema che era già stato incontrato da Einstein. Il «tensore di Ricci» è uno dei pochi oggetti che sono indipendenti dalla scelta delle coordinate. Esso è ottenuto dal tensore di Riemann facendo la media fra differenti combinazioni di curvature in differenti direzioni.[24]

Una volta preso in considerazione il tensore di Ricci, dobbiamo specificare in che modo varierà. Anche in questo caso, c'è essenzialmente solo un singolo modo naturale di procedere. L'operatore che fa la media fra le quantità su piccole sfere intorno a un punto è chiamato «laplaciano». Nel caso della conduzione termica, specifichiamo che la rapidità di variazione della temperatura rispetto al tempo è proporzionale al negativo del laplaciano. Detto per inciso, questo stesso preciso meccanismo è alla base dell'equazione di Black-Scholes che governa il prezzo delle opzioni nei mercati finanziari. L'equazione che ne risulta non è nient'altro che l'equazione del calore rivestita in abiti finanziari. Per quanto riguarda la curvatura, il meccanismo in questione è chiamato «flusso di Ricci» ed era il modo in cui Hamilton si proponeva di far evolvere le varietà. Hamilton intendeva esplorare le equazioni che governano il flusso con la speranza di dimostrare la congettura di geometrizzazione. Si tratta delle equazioni che Perelman scrisse sulla lavagna all'inizio della sua prima conferenza al Mit.

Le equazioni di Hamilton per il flusso di Ricci sono un tipo di equazioni differenziali, note come «equazioni differenziali alle derivate parziali» (o, semplicemente, «equazioni alle derivate parziali»). Un'equazione differenziale è un'equazione in cui si specificano le rapidità di variazione di qualche oggetto matematico sconosciuto e si cerca quell'oggetto come soluzione. Le equazioni alle derivate parziali sono un tipo di equazioni differenziali in cui si specificano le rapidità di variazione presso punti differenti in diverse direzioni. Le soluzioni delle equazioni alle derivate parziali sono oggetti che hanno le rapidità di variazione prescelte presso tutti i punti e in tutte le direzioni.

La maggior parte delle equazioni della fisica matematica sono equazioni differenziali alle derivate parziali. Le equazioni di Maxwell che uniscono elettricità e magnetismo sono equazioni alle derivate parziali che descrivono come i campi elettrico e magnetico variano e interagiscono da punto in punto come una funzione dei punti e delle direzioni del campo. Le equazioni di Einstein che mettono in relazione la materia, la curvatura dello spazio e la gravità sono a loro volta equazioni alle derivate parziali. Lo stesso vale per le equazioni che governano il flusso dei fluidi e la conduzione del calore, come anche per l'equazione di Schrödinger nel campo della meccanica quantistica. Le equazioni alle derivate parziali hanno un'enorme importanza pratica e sono state studiate in profondità per ben oltre un secolo. Il loro studio ricevette una rinnovata enfasi per via della Seconda guerra mondiale: lo sviluppo degli aerei supersonici richiedeva infatti la comprensione di come le soluzioni alle equazioni che descrivevano il flusso dei fluidi attorno alle ali degli aeroplani dipendessero dalla forma delle ali stesse e da velocità e direzione del flusso dell'aria che si creava attorno a esse. Anche per migliorare le previsioni degli uragani è necessario adottare metodi più accurati per risolvere queste stesse equazioni.

Come si procede per risolvere — o tentare di risolvere — un'equazione differenziale alle derivate parziali? Solitamente, il primo passo consiste nel riflettere a fondo su come potrebbe presentarsi l'insieme di possibili soluzioni e nel determinare quale sorta di struttura lo spazio delle possibili soluzioni potrebbe portare. Non è una sorpresa che l'insieme delle potenziali soluzioni, nel nostro caso l'insieme di tutte le metriche su uno spazio, si riveli essere uno spazio infinito-dimensionale: l'insieme di funzioni sulla retta reale è già uno spazio infinito-dimensionale, dato che ogni funzione è un punto nello spazio. Quindi, cerchiamo di interpretare le equazioni alle derivate parziali come se indicassero un flusso sullo spazio infinito-dimensionale, e cerchiamo di seguirlo. Tuttavia, per fare analisi su tali spazi è necessaria un'estrema cautela. Ci sono molte potenziali insidie. In uno spazio infinito-dimensionale c'è un sacco di posto, ed è facile che il percorso prescritto dall'equazione

conduca dritto fuori dallo spazio.

Ciò si verifica quando iniziamo a deformare una metrica e ci ritroviamo alla fine con qualcosa che non è più una metrica — le distanze da essa assegnate potrebbero diventare pari a 0 o negative, potrebbero estendersi all'infinito o potrebbero cessare di essere continue. Quando si verificano anomalie di questo genere, diciamo che le soluzioni alle equazioni sviluppano delle «singolarità». Noi dobbiamo riuscire a evitare le singolarità. Anche assumendo che il flusso conduca a qualcosa di significativo, dobbiamo essere in grado di seguirlo. Ma, a meno di riuscire a risolvere esattamente l'equazione, cosa che raramente succede, noi non possiamo mai seguire esattamente un flusso. Tutto ciò che possiamo fare è seguirlo approssimativamente. Pertanto, abbiamo bisogno di una sorta di limite che ci indichi che non siamo in errore e che ci stiamo muovendo nella direzione giusta. Tali limiti ci permettono anche di operare delle correzioni nel mezzo del cammino. Abbiamo poi bisogno di un altro insieme di limiti che ci garantiscano che ci terremo lontani dalle singolarità. Gli analisti si riferiscono a questi ultimi chiamandoli «stime». Le stime ci dicono quando siamo abbastanza vicini a dove qualcosa sta andando, in modo da poter continuare a seguirlo. Gli analisti le amano. Quasi tutti gli altri le temono. E per utilizzarle in prossimità delle singolarità è necessaria una grande immaginazione, oltre che una grande abilità.

Dai tempi di Riemann, che portò fondamentali contributi alla teoria dei flussi comprimibili, i geometri si sono serviti di equazioni alle derivate parziali per studiare le deformazioni di diverse strutture geometriche. Per uno strano scherzo del destino, sembra che le equazioni alle derivate parziali più intriganti — quelle che sono appena al di là del limite di ciò che siamo in grado di risolvere, ma che non sono talmente lontane da essere ritenute senza speranza di soluzione — siano quelle che nascono dalla geometria. Gli anni Settanta hanno visto numerosi splendidi successi che ci hanno mostrato come, partendo da una varietà la cui curvatura soddisfa determinati criteri restrittivi, è possibile alterare in modo continuo questa curvatura in modo da renderla più armoniosa fino a ritrovarsi con metriche particolarmente simmetriche. Shing-Tung Yau ricevette la medaglia Fields nel 1983 (lo stesso anno in cui venne premiato anche Thurston) per aver mostrato, fra le altre cose, che era possibile trovare metriche piatte su alcuni spazi deformando una metrica iniziale per mezzo di un'equazione alle derivate parziali. Nel 1981 Hamilton mostrò che, partendo da una metrica in cui la curvatura non era mai pari a 0 o negativa, il flusso di Ricci finiva per condurre a una metrica di curvatura positiva costante.[25]

Il risultato di Hamilton era qualcosa di sensazionale. In un punto chiave delle sue argomentazioni, egli dovette far ricorso al famigerato teorema di Nash-Moser della funzione inversa, di cui Nash si era servito per dimostrare che ogni varietà riemanniana poteva essere immersa in uno spazio euclideo di dimensione sufficientemente elevata. Il ragionamento di Hamilton venne semplificato da Dennis DeTurck, dell'Università della Pennsylvania.[26] Nel 1986, Hamilton e Michael Gage (ora all'Università di Rochester) riuscirono a dimostrare che un argomento analogo applicato a curve chiuse nel piano portava di fatto a far sì che la curva diventasse un cerchio.[27] Data una curva nel piano e un punto sulla curva, possiamo definire la curvatura della curva in quel punto come il reciproco del raggio del «cerchio osculatore» passante per quel punto. (Il cerchio osculatore di una curva in un punto è quel cerchio che è tangente a, e ha il più alto ordine di contatto con, la curva in quel punto.) Se a ogni punto la curva si sviluppava nella direzione perpendicolare alla curva stessa a una velocità proporzionale alla curvatura, allora Gage e Hamilton potevano mostrare che la curva si riduceva e diventava un cerchio. In altri termini, la curvatura si distribuiva, diventando costante.
Ciò è plausibile, ma di certo non è ovvio. E quanto più ci riflettiamo sopra, tanto meno sembra scontato. Supponiamo, per esempio, di partire con una curva come quella rappresentata in figura 36. Le regioni di massima curvatura si muoveranno più velocemente, ma ciò non è affatto immediatamente evidente; anzi, di fatto sembra decisamente possibile che parti della curva collassino su se stesse. Il risultato di Gage e Hamilton ci garantisce che non lo faranno.

Nei primi anni Novanta, Hamilton e i suoi collaboratori dimostrarono che partendo da una qualunque superficie bidimensionale compatta e lasciando che la curvatura si evolvesse secondo il flusso di Ricci, si giungeva infine a una superficie con curvatura costante.[28] Ovvero, la curvatura si distribuiva fino a diventare costante. Ciò forniva una prova concettualmente semplice del fatto che

ogni varietà bidimensionale portava una geometria unica, il risultato su cui Klein e Poincaré avevano lavorato molto duramente.

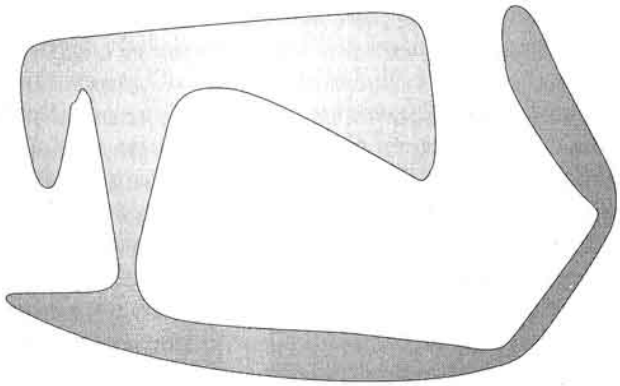


Figura 36: Se la curva si sviluppa a ogni punto lungo la perpendicolare alla curva, nella direzione del centro, e a una velocità uguale al reciproco del raggio del cerchio che meglio si adatta alla curva (questo reciproco è la curvatura), allora la curva si riduce a un punto, diventando allo stesso tempo sempre più circolare. Si tratta del teorema di Gage-Hamilton.

Purtroppo, Hamilton riuscì anche a mostrare che in generale, nel caso di varietà tridimensionali, il flusso di Ricci dava origine a singolarità. Se sulla varietà c'erano dei punti in corrispondenza dei quali la curvatura era nulla, il flusso di Ricci sviluppava orribili singolarità. Sembrava che non ci fosse alcun modo per evitarle. E, peggio ancora, c'erano moltissime possibilità che emergessero delle singolarità, e anche se era possibile ottenere delle stime vicino a qualcuna di esse, non sembrava esserci modo per affrontarle in generale. Le tecniche dei flussi di Ricci continuarono a essere utilizzate per molti lavori, in particolare nelle dimensioni superiori, e costituivano un potente strumento per studiare la geometria riemanniana. Ma sembrava che non ci fosse modo di servirsene per risolvere la congettura di geometrizzazione e, quindi, la congettura di Poincaré.

Altri tentativi

Ciò, naturalmente, non implicò la cessazione di altri tentati assalti alla congettura di Poincaré. Sembrava plausibile che una prova potesse prima o poi emergere dall'algebra pura. Dehn e Papakyriakopoulos avevano già presentato precedenti riduzioni all'algebra, ma, nei primi anni Settanta, Joan Birman (del newyorkese Barnard College) riformulò la congettura nei termini di un enunciato puramente algebrico che sembrava vulnerabile ai tentativi di soluzione.[29] Purtroppo, non ne nacque nulla.

Naturalmente, i topologi che indagavano le dimensioni inferiori continuavano a vedere il problema come di loro esclusiva competenza. Con l'algebra, avrebbero ancora potuto convivere, forse. Ma tutto questo parlare di geometria, e specialmente di equazioni differenziali alle derivate parziali, questo no, lo trovavano particolarmente sgradevole. Nel 1986 Colin Rourke (dell'Università inglese di Warwick) e un suo specializzando, il matematico portoghese Eduardo Rego, annunciarono una soluzione della congettura di Poincaré. Causando l'irritazione di molti membri della comunità matematica, Rourke si rivolse ai giornali prima che fosse terminato il processo di valutazione accademica del suo scritto. Durante un incontro a Berkeley, venne individuato un errore nella dimostrazione. Rourke affermò che era possibile correggerlo, ma purtroppo così non fu, e la prova venne ritirata.

Grazie al loro lavoro, comunque, Rourke e Rego avevano trovato un algoritmo per identificare le 3-varietà che si ottengono incollando assieme due tori solidi con n buchi. Ciò risolveva uno dei problemi che rendevano molto difficile trovare dei possibili controesempi alla congettura di

Poincaré. In precedenza, uno poteva trovare un possibile candidato senza però essere in grado di identificare la varietà risultante. Poco tempo dopo, Hyam Rubinstein, dell'Università di Melbourne, scoprì un algoritmo differente. Nel 1994, Abigail Thompson, dell'Università della California a Davis, raccolse un concetto da poco elaborato, chiamato «thin position», e se ne servì per rivoluzionare il problema del riconoscimento della 3-sfera dimostrando, reinterpretando e riformulando l'algoritmo di Rubinstein. Rourke combinò poi l'algoritmo di Rego-Rourke e l'algoritmo di Rubinstein-Thompson per scrivere un programma per computer che poteva essere usato per cercare dei controesempi alla congettura di Poincaré. Pur essendo diventati molto più veloci, i computer impiegavano ancora tempi estenuanti per controllare un possibile controesempio. Inoltre, in caso di assenza di controesempi alla congettura di Poincaré, il processo non sarebbe mai terminato. Ciononostante, un paio di studenti specializzandi implementarono un programma per computer e iniziarono a farlo girare.

Nel 1995 si diffuse una breve eccitazione quando Valentin Poénaru abbozzò un'argomentazione per provare la congettura attraverso la dimostrazione di un risultato 4-dimensionale che avrebbe implicato la congettura di Poincaré. Purtroppo, egli dovette poi ritirare Uno dei risultati sui quali si era basato.

E infine, non sarebbe possibile tralasciare le argomentazioni fondate sulla geometria differenziale. L'approccio di Hamilton attraverso il flusso di Ricci rimaneva promettente, anche se le difficoltà tecniche sembravano schiaccianti. Un altro approccio, di Michael Anderson, mirava a usare una regola, nuovamente descritta da un'equazione alle derivate parziali, per lasciare che la «curvatura totale scalare» (un numero, in corrispondenza di ciascun punto, ottenuto facendo la media della curvatura in ogni direzione per quel punto) fluisse da punti di maggior curvatura scalare a punti di minor curvatura, e viceversa. Come nel caso del flusso di Ricci, anche qui si incontravano singolarità che sembravano troppo complicate da analizzare.

Mentre il secolo volgeva al termine, la soluzione della congettura di Poincaré sembrava più lontana che mai.

Anche se l'assenza di progressi era scoraggiante, le idee topologiche di Poincaré avevano invaso tutte le aree della matematica. Avevano iniziato ad apparire connessioni tra la topologia e la fisica, e tra la topologia e l'informatica. Le scoperte di nuovi invarianti di nodi condussero a invarianti di varietà 3 e 4-dimensionali dei quali prima non si sospettava l'esistenza. I primi abbozzi di un tipo di geometria interamente diverso, la cosiddetta geometria simplettica, intravisti nell'ultimo articolo di Poincaré, maturarono in un nuovo campo di ricerca vero e proprio. La scoperta del comportamento caotico, compiuta da Poincaré, era pienamente entrata nella consapevolezza matematica; e uno dei problemi principali era se le equazioni che governavano il flusso dei fluidi — e in particolare la formazione degli uragani — avessero sistemi autenticamente caotici. Guardando in retrospettiva un secolo di conquiste senza precedenti, possiamo rintracciare ovunque l'influenza di Poincaré. La matematica non era mai sembrata più prospera.

Ma all'orizzonte c'erano anche delle nuvole. Il numero di persone che studiavano matematica avanzata iniziava a diminuire. Le lauree di primo livello conseguite negli Stati Uniti nel 1990 furono meno della metà di quelle conseguite nel 1975, e nel decennio 1990-2000 si ridussero ulteriormente. Anche il numero di dottorati specifici conseguiti in America e in altri Paesi fra il 1975 e il 2000 mostrò un analogo regresso. Nell'Unione Sovietica, poi, il declino dell'infrastruttura matematica fu ancora più marcato. Con il collasso dell'Urss, la più grande comunità scientifica del mondo si disperse. Anche se dagli anni Sessanta agli anni Ottanta la matematica era fiorita, il progresso si mostrava incerto quando alcuni dei più grandi risultati del secolo non erano ancora ben documentati. Il futuro della matematica non era mai sembrato così in pericolo.

14
Una soluzione nel nuovo millennio

Ci vorrà qualche anno prima che gli storici acquistino quella distanza necessaria per valutare in modo significativo il XX secolo. Nessun altro periodo aveva mai assistito a dei massacri della stessa portata... o fatto esperienza di una simile esplosione nel campo della conoscenza. La turbolenta storia del XX secolo ha avuto un'eco nella tempistica dei Congressi internazionali quadriennali in cui si riunivano i matematici di tutti i Paesi del mondo (e di tutte le branche della materia): a causa della Seconda guerra mondiale, dopo il 1936 non ci fu nessun congresso fino al 1950. Nel 2000 non si tenne un Congresso internazionale a segnare l'inizio del nuovo millennio perché il precedente incontro si era tenuto a Berlino nel 1998, e quello successivo era in programma per il 2002 a Pechino.

Ciononostante, il 24 maggio 2000 gli imponenti edifici che ospitano l'Accademia delle scienze di Parigi brulicavano di matematici. I filantropi americani Landon e Lavinia Clay avevano sovvenzionato un nuovo istituto dedicato al progresso e alla divulgazione del sapere matematico. Il comitato consultivo di alto livello della fondazione aveva deciso che il modo migliore per dar corso alla missione del Clay Institute era quello di identificare sette problemi matematici insoluti da tempo e offrire un premio di un milione di dollari per lo scioglimento di ognuno di essi.[1] Temendo che i giovani matematici fossero maggiormente propensi a rivolgere la loro attenzione a questioni più semplici nel tentativo di crearsi un curriculum di pubblicazioni, il comitato sperava che il premio in denaro avrebbe incentivato il coraggio di affrontare problemi più complessi. Come spiegò uno dei consiglieri dell'istituto, Alain Connes (un vincitore della medaglia Fields), il gruppo credeva che per quanto potesse essere duro lo sforzo per arrivare in cima, la visuale sarebbe poi stata così emozionante e così rivoluzionaria da ripagare ampiamente ogni fatica.[2]

I sette problemi furono presentati ai matematici e al pubblico in occasione di un incontro speciale per il nuovo millennio. C'era un clima di fervente attesa. I membri del comitato, che erano loro stessi matematici di prim'ordine, avevano tenuto ampie consultazioni. Non tutti erano d'accordo riguardo alla strategia di offrire ricompense in denaro, ma c'era molta curiosità su quali problemi fossero stati scelti. Di fatto, il sito web dell'istituto si congestionò fino a bloccarsi, sotto la pressione di un numero di contatti inaspettatamente alto, e il traffico sul mirror del sito presso la Società matematica americana rischiò di mandare in tilt anche i server di questa associazione.

Più di tutti gli altri scienziati (e in molti affermerebbero che la matematica è più arte che scienza), i matematici hanno un senso della storia. Il meeting del nuovo millennio costituiva un'eco del Congresso internazionale di Parigi del 1900, durante il quale David Hilbert aveva presentato un elenco di problemi che avrebbero fissato l'agenda matematica per il nuovo secolo. L'incontro del 2000 si aprì con un breve intervento del presidente del Clay Institute, Arthur Jaffe, che terminò facendo ascoltare una registrazione del famoso discorso di Hilbert del 1930, una delle ultime conferenze pubbliche tenute dal matematico tedesco e la prima a essere trasmessa via radio. Il consiglio comunale della sua città natale, Königsberg, aveva riconosciuto a Hilbert la cittadinanza onoraria in occasione del suo collocamento a riposo. Commosso, Hilbert preparò con cura e tenne un vigoroso intervento in cui affermò che l'intera cultura dell'epoca, per tutto ciò che riguardava la comprensione e l'utilizzo della natura, si basava sulla matematica. Egli condannò il pessimismo intellettuale e l'idea secondo la quale esistevano problemi irrisolvibili.

A quasi settant'anni di distanza da quel giorno, nell'auditorium dell'Accademia delle scienze si diffuse un fremito quasi palpabile nel sentir riecheggiare la forte, chiara voce di Hilbert, il cui discorso si concludeva con quello che sarebbe diventato il suo epitaffio: *«Wir müssen wissen, wir*

werden wissen» (Noi dobbiamo sapere, noi sapremo). Tutti conoscevano questa citazione e potevano sentire la passione del suo autore nel pronunciarla. E tutti conoscevano anche il retroscena legato a questa vicenda.[3] E, pochi mesi dopo il discorso di Hilbert, Kurt Gödel dimostrò che era impossibile trovare un sistema di assiomi logici che fosse sufficiente a dimostrare ogni immaginabile risultato nel campo della teoria dei numeri e che, al contempo, non conducesse a una qualche contraddizione. La logica aveva dei limiti.

Il discorso di Jaffe fu seguito da quello di Timothy Gowers (un vincitore della medaglia Fields) sull'importanza della matematica. In una classica esibizione di modestia, questi sottolineò il ritorno sull'investimento portato dalla scelta di finanziare i matematici perché si dedichino alla loro disciplina in accordo con il loro specifico senso di bellezza e armonia. Sir Michael Atiyah (vincitore della medaglia Fields ed ex preside del Trinity College) e il celebre studioso di teoria dei numeri John Tate presentarono gli enunciati e lo sfondo concettuale dei sette che erano stati scelti come i problemi del millennio. Tutti e sette erano ben noti a ogni matematico serio, tutti erano riconosciuti come straordinariamente difficili e di tutti era compresa l'enorme importanza.

Anziché selezionare problemi strutturali che avrebbero esplicitamente richiesto lo sviluppo di una teoria interamente nuova, il comitato consultivo del Clay Institute aveva optato per problemi molto specifici e concreti. Anche se la decisione di assegnare dei premi era andata incontro a qualche contestazione, e anche se c'erano numerosi altri interrogativi che sarebbero potuti comparire sulla lista, nessuno poteva indicare un problema fra i sette scelti che non meritasse di stare in quell'elenco. Il comitato aveva deciso bene.

Il primo problema a essere menzionato fu la congettura di Poincaré. Anche se era stato indicato da tutti i matematici consultati dal Clay Institute per la compilazione della lista,[4] l'effetto psicologico della sua inclusione fu enorme. Quando gli ostacoli rimangono inaggirati per molto tempo, può subentrare lo scoraggiamento. Forse il problema è indecidibile, nel senso che richiede assiomi della teoria degli insiemi più forti di quelli normalmente usati. O, forse, la congettura tiene, ma non c'è una buona ragione che ne spieghi il perché: semplicemente, il colpo di fortuna della cancellazione algebrica che potrebbe portare a un controesempio non si verifica, e il discorso finisce qui. O forse il problema non era poi così importante, in fin dei conti. Magari la congettura di Poincaré è solo una minuscola parte di quel minuscolo, ultraspecialistico sottocampo della matematica che è la topologia tridimensionale classica.

L'inclusione della congettura di Poincaré mandò un messaggio molto chiaro: la congettura era importante e non solo per i matematici ma per tutti gli scienziati, e per tutti noi. Essa faceva parte del nostro comune patrimonio intellettuale. E il tono generale della conferenza, nonché il fatto di aver scelto di ascoltare le ultime parole di Hilbert, dicevano anche qualcosa in più. Hilbert, è vero, aveva sbagliato a ritenere che non ci fossero problemi indecidibili, ma il suo ottimismo di fondo era ben motivato. Noi *possiamo* risolvere la congettura di Poincaré. Se non voi o io, qualcun altro, da qualche parte. E quella soluzione ci arricchirà tutti.

È Perelman l'uomo che aspettavamo?

L'11 novembre 2002, Grigori Perelman mandò un articolo a vvrww.arXiv.org, il server online che è diventato il mezzo comune per lo scambio di articoli — nelle molteplici aree della fisica, della matematica e della scienza dei computer — prima della pubblicazione. Perelman scrisse un'e-mail a un po' di persone avvisandole di un suo primo contributo. In seguito inviò altri due articoli, rispettivamente quattro e otto mesi dopo.[5]

L'articolo di novembre attirò immediatamente l'attenzione. In primo luogo, era eccezionalmente lucido e concreto. Rivolto a coloro che lavoravano sul flusso di Ricci, si apriva con una rapidissima presentazione dell'opera di Hamilton: «Hamilton ha scoperto una rimarchevole proprietà delle soluzioni [...] [che gli consente] di confrontare la curvatura della soluzione in corrispondenza di punti e momenti temporali differenti. Questi risultati hanno condotto Hamilton ad alcune congetture sulla struttura dei limiti di esplosione in dimensione 3 [...]; il presente lavoro le conferma».[6] Quelle

congetture estremamente tecniche erano ben note agli esperti del flusso di Ricci. Erano straordinariamente difficili e riguardavano esattamente le aree dove Hamilton e altri, nel loro tentativo di dimostrare la congettura di geometrizzazione, si erano scontrati con ostacoli apparentemente insormontabili. Dimostrare queste congetture sarebbe stato un enorme passo avanti, e le conseguenze sarebbero state sbalorditive.

Per evitare fraintendimenti, Perelman chiarì ulteriormente il proprio pensiero: «L'implementazione del programma di Hamilton implicherebbe la congettura di geometrizzazione per le 3-varietà chiuse»,[7] e proseguì dicendo che, pur non essendo in grado di confermare la speranza di Hamilton che la curvatura non diventasse infinita in alcune regioni con lo scorrere infinito del tempo, poteva però mostrare che tali regioni sarebbero collassate in un modo controllato, e che ciò era sufficiente per trarre delle conclusioni sul piano topologico.

Nessun matematico potrebbe fare a meno di cogliere un senso di autenticità nelle parole di Perelman. Quindi, incredibilmente, divenne chiaro che Perelman stava cercando qualcosa di più. Molto di più, in verità. Egli alluse a un collegamento tra il flusso di Ricci e un flusso profondamente diverso che si ritrova nella fisica quantistica e che connette lo spazio a differenti risoluzioni. In questo caso, il parametro non è il tempo, bensì la scala — e il nostro spazio non è modellato da una varietà con una metrica, bensì da una gerarchia di varietà e di metriche connesse dall'equazione del flusso di Ricci. Questa sorta di cambiamento fondamentale nella prospettiva richiamava alla mente la lezione di abilitazione di Riemann. Questa matematica appartiene in pieno al nuovo secolo e al nuovo millennio, ma il concetto di una gerarchia di metriche sarebbe piaciuto anche a Riemann.

Perelman scrisse: «Si noti che qui siamo di fronte a un paradosso: le regioni che appaiono essere lontane le une dalle altre su una grande scala di distanza possono diventare vicine su una piccola scala di distanza; inoltre, se ammettiamo il flusso di Ricci attraverso le singolarità, le regioni che si trovano in differenti componenti connessi su una grande scala di distanza possono diventare limitrofe [,..]».[8] Questo è materiale da fantascienza. Quindi, tornando sulla Terra, scrisse: «In ogni caso, questa connessione tra il flusso di Ricci e il flusso dell'RG [gruppo di rinormalizzazione] suggerisce che il flusso di Ricci dev'essere un flusso gradiente; il presente lavoro conferma questa aspettativa».[9] Beh, anche questo è quasi ultraterreno... I flussi gradiente sono qualcosa di relativamente ben compreso, ma il fatto di dire che il flusso di Ricci può essere considerato come un flusso gradiente rappresentava un'altra intuizione fondamentale. Delineando il contenuto del proprio articolo, Perelman sottolineò che le prime dieci sezioni si applicavano a qualunque dimensione e senza assunzioni sulla curvatura. Le ultime tre sezioni riguardavano l'approccio di Hamilton alla congettura di geometrizzazione. «Infine, nel § 13 presentiamo un breve abbozzo della congettura di geometrizzazione.»[10] Promise quindi che entro breve avrebbe prodotto un secondo articolo più dettagliato.

In effetti, Perelman si spinse a dire che «[...] ho già dimostrato quasi tutto ciò che Richard Hamilton ha congetturato sul flusso di Ricci. Oh, tra l'altro, questo significa che ho dimostrato la congettura di geometrizzazione e, quindi, la congettura di Poincaré. Ma la cosa veramente interessante è che ho dimostrato che il flusso di Ricci ha alcune proprietà valide in tutte le dimensioni di cui nessuno ha mai sospettato prima l'esistenza, e queste proprietà hanno alcune conseguenze sorprendenti».

Queste affermazioni rappresentavano una stranissima combinazione di modestia e baldanza. Chiunque altro avrebbe cominciato dicendo «Ho dimostrato la congettura di Poincaré», o «Ho dimostrato la congettura di geometrizzazione». Invero, ben poche persone avrebbero immediatamente compreso a che cosa puntava Perelman. Per gli esperti del flusso di Ricci, comunque, l'annuncio era qualcosa di sbalorditivo. Gli elementi da lui menzionati erano tutto quello che c'era in gioco, ma i suoi occhi erano fissi su qualcosa che andava molto oltre il gioco. Perelman sapeva che l'annuncio della dimostrazione della congettura di Poincaré era una notizia straordinaria, ma sembrava quasi che volesse sminuirne la portata. A riconoscere il significato profondo del suo annuncio furono solo le persone che potevano permettersi di giudicarlo.

L'articolo di Perelman contrastava con un altro annuncio, pubblicato diversi mesi prima, nel quale Martin Dunwoody, dell'Università di Southampton, aveva dichiarato di aver scoperto una

prova della congettura di Poincaré basata sull'algoritmo Rubinstein-Thompson. Rourke trovò un errore nella presunta dimostrazione, e Dunwoody ritirò l'articolo. Dunwoody è un matematico molto stimato, ma l'articolo di Perelman era di tutto un altro ordine di grandezza: era molto più ambizioso, e il suo obiettivo principale non erano né la congettura di Poincaré, né la congettura di geometrizzazione.

Qualunque articolo che avesse presentato la stessa combinazione di intuizione, cura e autorevolezza dello scritto di Perelman, avrebbe presto o tardi finito per attirare l'attenzione. Ma Perelman non era proprio un illustre sconosciuto. Dimenticato, forse sì, ma ignoto certamente no.

Da giovane, Perelman aveva vinto le Olimpiadi generali di matematica dell'Unione Sovietica. Complessivamente, il livello dell'istruzione matematica nell'Urss era alto dalle scuole elementari fino ai corsi di specializzazione post-laurea, e i ricercatori in matematica si preoccupavano dei curriculum delle scuole primarie e secondarie. Gli studenti di talento venivano presto identificati e c'era una fortissima tradizione di guide e mentori. Perelman aveva studiato presso una famosa scuola superiore di San Pietroburgo specializzandosi in matematica e fisica.[11] Nel 1982, fu uno dei tre individui che ottennero il punteggio pieno alle Olimpiadi internazionali di matematica di Budapest.[12]

Nei primi anni Novanta, Perelman trascorse alcuni anni di specializzazione post-dottorato negli Stati Uniti, dove la sua genialità non passò inosservata e viene ricordata ancora oggi. Nel 1993, all'età di ventisette anni, egli aveva ottenuto molti risultati. Aveva chiarificato la teoria delle varietà con curvatura sempre diversa da zero. Aveva inoltre risolto un grande problema della geometria riemanniana, la «soul conjecture» (congettura dell'anima), che concerne la caratterizzazione di varietà in cui la curvatura può essere pari a 0.[13] Se la curvatura era sempre positiva, veniva a emergere che la varietà era omeomorfa allo spazio euclideo. Perelman dimostrò che se la curvatura era pari a 0 in alcune regioni e positiva in altre, ne risultava che c'era una regione dello spazio, chiamata «anima», che conteneva in un certo senso tutta la topologia della varietà. Se la curvatura non era mai negativa e c'era anche un solo punto dove la curvatura era positiva, Perelman dimostrò che l'anima consisteva di un singolo punto e la varietà doveva essere omeomorfa allo spazio euclideo.[14] L'articolo apparve nel 1994, l'anno in cui lo studioso presentò i suoi ultimi scritti pubblicati. Quello stesso anno, venne invitato a parlare al Congresso internazionale dei matematici di Zurigo. In seguito, ritornò in Russia e sembrò sparire dalla circolazione. Nel 1996 gli venne assegnato un premio dalla Società matematica europea, ma lui non si presentò mai per ritirarlo.

L'ambito di competenza di Perelman è precisamente quell'area dove i tentativi di attaccare la congettura di Poincaré usando metodi della geometria differenziale si erano arenati. Nei primi anni Novanta aveva lavorato su varietà che hanno regioni dove la curvatura è 0: proprio quelle regioni dove il flusso di Ricci sviluppava delle singolarità e l'analisi si bloccava.

E c'era poi un ultimo indizio profetico. Perelman apparteneva al gruppo di fisica matematica del dipartimento di San Pietroburgo dell'Istituto Steklov.[15] Si tratta di un gruppo leggendario che ha portato contributi decisivi e fondamentali alla nostra comprensione delle equazioni alle derivate parziali. L'anima del gruppo era stata per decenni (fino alla sua morte, nel 2004) Olga Ladyzhenskaya, la bella e brillante matematica il cui padre era stato giustiziato senza processo dalle autorità staliniste[16] e che aveva dedicato tutta la propria vita alla matematica. Pochi altri posti avevano a disposizione una simile concentrazione di cervelli in grado di comprendere le sottigliezze del comportamento delle soluzioni di equazioni differenziali paraboliche non-lineari, la classe di equazioni a cui apparteneva il flusso di Ricci. E un numero ancora minore di centri avrebbero potuto vantare la guida di una persona più dotata, più comprensiva e più disposta a riconoscere la totale dedizione alla matematica.

Le reazioni alla bomba silenziosa lanciata da Perelman non si fecero attendere molto. Ben presto, le caselle di posta elettronica iniziarono a straripare. Otto giorni dopo l'invio dell'articolo del novembre 2002, Vitali Kapovitch, dell'Università della California a Santa Barbara, mandò un'e-mail a Perelman: «Ciao Grisha, scusa se ti disturbo ma ci sono un sacco di persone che mi fanno domande sul tuo articolo sulla formula dell'entropia per il flusso di Ricci. Se ho inteso correttamente, tu non saresti ancora in grado di sviluppare tutti i passi previsti dal programma di

Hamilton, ma ne puoi fare abbastanza da dimostrare, usando alcuni risultati collassanti, la congettura di geometrizzazione, giusto? Vitali». Pochi giorni dopo arrivò la risposta: «E proprio così. Grisha».[17]

Lo scetticismo era unito alla speranza. Geometri e analisti erano in attesa del successivo articolo di Perelman, che avrebbe dovuto presentare i dettagli necessari a completare la prova abbozzata nella sezione 13 del primo contributo. L'articolo, estremamente tecnico, comparve su www.arXiv.org il 10 marzo 2003. In esso, Perelman corresse l'enunciato di due risultati riportati nel primo scritto, mostrando, tuttavia, che le correzioni non avevano effetto sulle conclusioni. Il mese successivo, Perelman andò negli Stati Uniti, dove tenne quelle conferenze a Cambridge e alla Stony Brook University di cui abbiamo parlato nel capitolo 1. Tornato in Russia, inviò il terzo articolo il 17 luglio, presentando un ulteriore risultato analitico che gli permise di usare la prima (e meno difficile) metà del suo secondo articolo per dimostrare direttamente la congettura di Poincaré.[18] Un mese dopo, Tobias Colding e William Minicozzi trovarono una dimostrazione ancora più semplice, più geometrica, di questo risultato analitico.

Durante i tre anni successivi al suo primo articolo, il lavoro di Perelman venne sottoposto a una serie di controlli senza precedenti. Bruce Kleiner e John Lott, dell'Università del Michigan, aprirono un sito web con dettagliati commenti sui tre articoli.[19] Vennero pubblicati anche appunti manoscritti delle sue conferenze.

Il Clay Institute, fedele alla sua missione di sostenere e diffondere il sapere matematico, entrò immediatamente in azione. Nel novembre 2003, Richard Hamilton ricevette un premio di ricerca dall'istituto per il suo lavoro sul flusso di Ricci. Lott e Kleiner, che avevano scritto delle note sul primo articolo di Perelman, ricevettero il sostegno dell'istituto per preparare una spiegazione dettagliata in cui chiarire, praticamente riga per riga, il secondo articolo di Perelman.[20] Nell'agosto 2004, l'istituto organizzò e condusse un seminario di una settimana a Princeton, con la partecipazione di una decina di esperti conoscitori del lavoro di Perelman. Nel 2005, la scuola estiva di quattro settimane organizzata dall'istituto venne dedicata al flusso di Ricci. Si tennero una serie di lezioni indirizzate a studenti specializzandi (di cui presto dovrebbero essere pubblicati gli atti). Il matematico di Princeton[21] Gang Tian e il matematico della Columbia University John Morgan ricevettero una sovvenzione parziale per facilitare il progresso di un libro in corso di pubblicazione sul lavoro del collega russo.[22]

In tutto il mondo si svolsero seminari di ricerca per esaminare attentamente i risultati di Perelman. Gruppi di studiosi a Grenoble, a Trieste e a Monaco chiarirono molti dettagli. Nel giugno 2005, Gerard Besson presentò il lavoro di Perelman al celebre seminario Bourbaki a Parigi.[23] In seguito a un altro seminario protrattosi per un anno a Harvard, Huai-Dong Cao e Xi-Ping Zhu[24] scrissero un lungo articolo che spiegava molti aspetti del lavoro di Hamilton e Perelman e che offriva un differente approccio ad alcune delle stime di Perelman.[25] Altri istituti matematici, negli Stati Uniti e in Europa, e singoli esperti nei diversi Paesi del mondo, giocarono un ruolo di primo piano nella decifrazione e nella rielaborazione delle intuizioni dello studioso sovietico.[26]

Tutte queste persone hanno permesso al resto del mondo una più piena comprensione del lavoro di Perelman. Hamilton aveva classificato le singolarità del flusso di Ricci e aveva iniziato una loro analisi preliminare. Le singolarità, però, sono cose che i matematici cercano normalmente di evitare. Perelman, invece, si avventurò in profondità nelle regioni prossime alle singolarità del flusso di Ricci. Egli trovò delle regolarità inaspettate quando la curvatura diventava così forte che lo spazio nella varietà minacciava di dissolversi, e introdusse nuovi strumenti matematici per misurare il potenziale collasso. Mostrò che un certo tipo di singolarità non poteva mai verificarsi, e che le altre si comportavano in un modo molto controllato. Di fatto, vicino alle singolarità la profonda natura geometrica del flusso diventava massimamente evidente. Perelman mostrò che, mentre il flusso procedeva, i punti dove si verificavano le singolarità davano origine a pezzi che potevano essere tagliati fuori dalla varietà originaria e che avevano geometrie omogenee nel senso di Thurston. Dopo che queste parti erano state tagliate fuori, era possibile far ripartire il flusso e lasciarlo procedere finché non si formavano nuove singolarità e con esse nuove regioni con geometrie omogenee. Quindi, era nuovamente possibile ritagliare anche queste regioni e riavviare

daccapo il flusso.

Non sarebbe possibile immaginare un'interazione più stretta fra geometria e topologia. Sembrava quasi che la congettura di geometrizzazione di Thurston e il flusso di Ricci fossero stati progettati assieme. Il flusso di Ricci era una macchina che sottoponeva a un processo la varietà, stirandola e manipolandola, ritagliando pezzi con geometrie omogenee. Alla fine del processo, l'intera varietà era stata scomposta in pezzi geometrici. Le esposizioni del lavoro di Perelman presentate da John Morgan, Michael Anderson e Laurent Bessières rivelano il modo prodigioso in cui il flusso di Ricci viene di fatto a compiere la divisione di una 3-varietà in pezzi che portano una geometria omogenea.[27]

Il risultato finale non potrebbe essere più gratificante. Consideriamo una 3-varietà che non ha bordo e non si estende all'infinito. Possiamo usare i metodi standard della topologia differenziale per darle una struttura geometrica. Ora prendiamo il flusso di Ricci e lasciamo che la varietà si evolva in accordo con esso. Se la varietà è semplicemente connessa (ossia, se è tale che ogni ciclo può essere ridotto a un punto), allora Perelman dimostra che il flusso di Ricci, magari dopo qualche innocuo intervento di chirurgia, riuscirà alla fine a spianare gli estremi della curvatura, restituendoci una varietà con curvatura positiva costante omeomorfa alla varietà originale. Argomentazioni note da tempo dimostrano che una varietà semplicemente connessa con curvatura positiva costante è necessariamente una sfera tridimensionale. Dunque, il lavoro di Perelman dimostra la congettura di Poincaré.

E per quanto riguarda la forma dell'universo?

A Canton, nell'estremo nord degli Stati Uniti, Jeff Weeks — ex allievo di Thurston e vincitore della borsa di studio MacArthur, spesso definita come una «sovvenzione ai geni» — si è messo a raccogliere e studiare le ricerche mirate a determinare la forma dell'universo. Weeks è uno dei matematici della nuova generazione, che usa internet per lavorare lontano dai grandi centri di ricerca. Gestisce un sito web, www.geometrygames.org, da dove si possono scaricare alcuni programmi che permettono all'osservatore di pilotare un'astronave in universi dalle forme differenti.

Se l'universo non è troppo grande, in rapporto alla sua età, ed è finito ma non ha un bordo, allora dovremmo essere in grado di vederlo per intero. Ma esistono delle complicazioni: dal momento che la luce viaggia a una velocità finita, osservare punti estremamente lontani significa guardare indietro nel tempo. Ma dovremmo vedere immagini multiple degli stessi superammassi di galassie. Il tentativo di accoppiare fra loro differenti regioni del cielo conduce a un enorme problema statistico chiamato «cristallografia cosmica». I cicli chiusi che non possono essere ridotti a un punto apparirebbero come picchi nell'«istogramma di separazione di coppia», uno strumento matematico usato per cercare la periodicità nei dati. Qualora il nostro universo fosse sufficientemente piccolo, l'assenza di tali picchi suggerirebbe che esso è semplicemente connesso.

In un universo sufficientemente piccolo che non sia semplicemente connesso, c'è un altro insieme di dati che provengono dalle cosiddette «superfici di ultimo scattering» che, sottostando a determinate condizioni, ci permettono di dedurre la forma dell'universo. Le superfici di ultimo scattering si intersecheranno fra di loro, e lungo le loro intersezioni, dopo aver calcolato e isolato la media del rumore cosmico di fondo, dovrebbero apparire dei deboli cerchi. La disposizione di questi cerchi ci permetterebbe di dedurre la forma dello spazio. Nei primi anni del XXI secolo è stata svolta una ricerca su quei cerchi che indicherebbero che l'universo ha la topologia dello spazio dodecaedrico di Poincaré. Tuttavia, sembra che i cerchi che ci si aspettava di trovare non ci siano. O l'universo è troppo grande, o è una sfera, o il suo gruppo fondamentale è totalmente diverso. E poi anche possibile che alcune fonti di «rumore» possano oscurare i cerchi.

Al momento attuale, un certo numero di osservazioni astronomiche suggeriscono che la curvatura media del nostro universo dovrebbe essere molto vicina a 0.[28] L'opinione prevalente fra gli astrofisici è a favore di un universo piatto, anche se non è possibile escludere un universo con una

curvatura leggermente positiva. (I dati sperimentali sembrano invece escludere che l'universo abbia una curvatura negativa.) Grazie al lavoro di Perelman, noi sappiamo che se nell'universo ci sono solo un numero finito di cicli chiusi non equivalenti, esso deve allora avere una curvatura positiva. La questione della forma dell'universo, comunque, rimane tuttora decisamente aperta.

Riemann introdusse le varietà come un modello matematico per esplorare differenti regioni di spazio. Nella sua lezione del 1854, egli affermò che ci sarebbero potuti essere anche altri modelli. Cinquant'anni dopo, Poincaré completò il suo lavoro sulla topologia algebrica, lasciandoci in eredità la sua congettura. Quasi un secolo dopo, Perelman ci ha fatto un regalo paragonabile a quelli che abbiamo ricevuto da Poincaré e da Riemann. Non c'è dubbio che la superficie della Terra e l'universo, quando vengono osservati su una certa scala, appaiono essere varietà.

Ma se guardiamo più da vicino la superficie della Terra, vediamo che ci sono dei ponti, naturali e artificiali, che vengono ad alterare la sua topologia. Se la osserviamo ancor più da vicino, la sua superficie cessa di essere uniforme e diventa discreta, fatta da differenti atomi e particelle. Analogamente, l'universo potrebbe essere molteplicemente connesso con maniglie tridimensionali in prossimità dei buchi neri. Se poi guardiamo ancor più da vicino il tessuto stesso dello spazio, esso ci appare come una sorta di schiuma quantica, forse con piccolissime sfere iperdimensionali attaccate a ogni punto. Un oggetto del genere, con differenti topologie su differenti scale, trova certo un modello migliore in oggetti di matematica quantistica come quelli intravisti da Perelman. Riemann avrebbe approvato.

Il premio

I primi anni del nuovo secolo hanno evidenziato che il modo in cui lavorerà la comunità matematica in futuro sarà molto diverso da quello a cui i matematici si sono abituati nel corso degli ultimi decenni. Gli organizzatori del Clay Institute davano per scontato che ogni matematico serio avrebbe sottoposto i suoi risultati all'esame di una rivista. Di fatto, i regolamenti affermavano che le soluzioni eleggibili per uno dei premi del millennio dovevano essere pubblicate su (e, quindi, essere precedentemente valutate da) una rivista specializzata di fama mondiale, e che — due anni dopo — dovevano aver raccolto il consenso generale della comunità matematica. Anche se Perelman non ha presentato i suoi lavori a nessuna rivista per più di un decennio, egli ha senza dubbio reso la sua opera disponibile per essere esaminata da chiunque volesse cimentarvisi; inoltre le norme dell'istituto accettano altre forme di pubblicazione.

Dato che Perelman non sembrava interessato al premio, e che aveva di fatto iniziato a lavorare sulla geometrizzazione nel 1995 — ben prima, quindi, dell'annuncio del concorso —, ci si potrebbe chiedere se i premi del millennio abbiano giocato un qualche ruolo nella soluzione della congettura di Poincaré. Per quanto strano, la risposta sembra essere sì, anche se non nella modalità prevista dagli organizzatori. Un risultato così complesso come quello di Perelman non avrebbe probabilmente ottenuto rapida e diffusa accettazione senza il tempestivo supporto del Clay Institute. L'istituto non ha appoggiato Perelman, ma ha sostenuto invece coloro che erano in grado di comprendere il suo lavoro e insegnarlo ad altri. La valutazione di uno scritto prima della pubblicazione ha un'importanza critica in matematica. L'assicurazione che un lavoro è valido permette agli altri di costruire su di esso e di rielaborarlo; tuttavia, l'accettazione erronea di un risultato falso può facilmente uccidere un campo di ricerca. Per valutare bene un lavoro occorre capacità di comprensione, e comprendere significa ricreare per proprio conto, nella propria mente, quella matematica che l'autore ha elaborato. La ricreazione, fortunatamente, è più facile dell'invenzione o della scoperta, ma ciò non significa che sia un'operazione banale. Il lavoro di Perelman attinge da molte aree differenti ed è particolarmente delicato. Ci sono pochi individui in grado di valutarlo adeguatamente, e senza il supporto dell'istituto alcune di queste persone non avrebbero avuto il tempo di esaminarlo criticamente, perché ciò li avrebbe lungamente allontanati dai loro ambiti di ricerca.

In ogni caso, alla fine del 2005 tutte le indicazioni suggerivano che la dimostrazione di Perelman

reggeva. Durante un convegno organizzato a Trieste, nel giugno di quell'anno, per esaminare i progressi nello studio delle 3-varietà alla luce del lavoro di Perelman, i partecipanti analizzarono gli articoli del matematico russo e votarono per acclamazione che la congettura di Poincaré era stata risolta.[29] Ciò, naturalmente, non equivaleva all'attento processo di recensione indipendente, ma era comunque un segno di speranza. Il numero di false dimostrazioni della congettura presentate in precedenza aveva reso tutti più cauti, e le argomentazioni che fanno uso di equazioni alle derivate parziali sono riconosciute come particolarmente difficili.

Poi, improvvisamente, nel giugno 2006 iniziarono a diffondersi su internet delle voci secondo le quali ci sarebbero potuti essere dei problemi negli articoli di Perelman. Traduzioni di giornali cinesi lasciavano intendere che c'erano alcuni buchi nella sua dimostrazione della congettura di geometrizzazione, buchi che erano stati però riempiti dai matematici Huai-Dong Cao e Xi-Ping Zhu.[30] Stando a una citazione a lui attribuita, il vincitore della medaglia Fields Shing-Tung Yau aveva affermato — nel corso di un importante convegno sulla teoria delle stringhe tenutosi a Pechino — che il lavoro di Cao e Zhu era stato assolutamente essenziale, perché i buchi nel lavoro di Perelman erano piuttosto grandi. Con il diffondersi di versioni contraddittorie dei fatti, la confusione iniziò a dilagare. Il 25 giugno, il Clay Institute pubblicò sulla home page del proprio sito, senza commenti, i link all'articolo di Cao-Zhu, al libro di Morgan-Tian e alla versione pre-stampa del lavoro di Kleiner-Lott, assieme a un link al sito web gestito da Kleiner e Lott e agli articoli di Perelman. Che cosa stava succedendo? Le argomentazioni di Perelman erano forse crollate? La congettura di Poincaré era nuovamente in dubbio?

15
Madrid, agosto 2006

Il XXV Congresso internazionale dei matematici si aprì martedì 22 agosto 2006 a Madrid. Nei giorni precedenti, quasi 4000 matematici erano affluiti nella capitale spagnola da più di 120 Paesi del mondo.

Nessun congresso matematico era mai stato tanto atteso. Per mesi, i comunicati stampa ufficiali avevano lasciato intendere che durante il congresso sarebbe stato chiarito lo status della congettura di Poincaré.[1] Richard Hamilton era stato invitato a tenere il discorso di apertura davanti all'assemblea plenaria, e il programma prevedeva un intervento di John Morgan. Nel corso dell'estate, erano cresciuti i dubbi sul fatto che la congettura di Poincaré fosse stata davvero risolta e sulla correttezza delle argomentazioni di Perelman. Il matematico russo avrebbe ricevuto una medaglia Fields? Le regole specificavano che i vincitori dovevano avere meno di quarant'anni il I gennaio dell'anno del conferimento del premio. Perelman aveva compiuto il quarantesimo anno d'età il 13 giugno 2006, quindi questa era l'ultima occasione in cui avrebbe potuto riceverlo. Si sarebbe fatto vivo? E, qualora avesse rifiutato la medaglia, il comitato Fields gliela avrebbe assegnata ugualmente?

La storia, nel frattempo, era trapelata sui media. Sui giornali di diversi Paesi del mondo apparvero articoli su Perelman e sulla congettura. All'inizio del congresso, «The New Yorker» pubblicò un articolo sensazionalistico, scritto da due ragguardevoli giornalisti, in cui si affermava che, in Cina, Shing-Tung Yau aveva deliberatamente tentato di gettare dei dubbi sui risultati di Perelman al fine di attribuire il merito della scoperta ai suoi studenti.[2] I giornalisti che avevano preso il volo per andare a San Pietroburgo a trovare Perelman riferirono che il matematico solitario avrebbe rifiutato la medaglia Fields.

Il meeting di agosto fu il primo Congresso internazionale tenuto in Spagna, e Madrid era un posto particolarmente adatto. Nove secoli prima, a una sessantina di chilometri di distanza, nella vicina Toledo, le traduzioni in latino di opere arabe di matematica e scienza (e di traduzioni arabe di opere scientifiche greche) fatte da Gherardo da Cremona avevano dato inizio alla rinascita degli studi in Europa. Le sue traduzioni di Euclide, di Tolomeo e dei commentari di al-Nayrizi sugli *Elementi* avevano stimolato la fondazione delle prime università.

I matematici spagnoli avevano fatto tutto il possibile per accogliere al meglio i loro colleghi. Come sottolinearono con orgoglio, a Madrid non si vedeva un così grande assembramento di scienziati dal 1581, quando la decisione (presa vent'anni prima) di trasferire la corte spagnola a Madrid aveva portato alla più grande concentrazione di matematici in Europa. Re Juan Carlos avrebbe presieduto alle cerimonie di apertura, durante le quali ci sarebbe stata la consegna delle medaglie Fields. Il popolare monarca aveva guidato la formazione di un governo democratico dopo la morte del dittatore Franco, nel 1975. Il suo coraggio nel resistere a un tentativo di golpe di destra nel 1981 aveva segnato un punto di svolta nella recente storia spagnola, al quale seguirono una formidabile crescita economica e una vera e propria fioritura della ricerca.

All'esterno dell'edificio del congresso si formarono lunghe file mentre i matematici passavano attraverso il metal detector e le loro borse venivano controllate. I carri attrezzi rimossero le auto parcheggiate nelle aree adiacenti, una precauzione presa in seguito all'attentato ai treni pendolari che al-Qaida aveva compiuto nel 2004 a Madrid e in cui erano rimaste uccise più di 200 persone e ferite altre 500.

Alle 10:30 del mattino, il congresso si aprì con la proiezione di un filmato, *Shape Through Time* (La forma attraverso il tempo), che richiamava la passione degli arabi per gli schemi regolari e le

tradizioni geometriche del passato multietnico spagnolo. Il video venne seguito dal tradizionale concerto, questa volta con un trio di strumenti a corda, guidato da Ara Malikian (un violinista spagnolo di talento di origini armeno-libanesi), che includeva anche una chitarra da flamenco. Infine, il presidente dell'Unione matematica internazionale, il celebre studioso di matematica applicata sir John Ball, si rivolse all'assemblea:

> Durante le celebrazioni di questa festa della matematica, con i molti spunti di discorso che essa ci fornirà, vale la pena di riflettere sui modi in cui funziona la nostra comunità. La matematica è una professione di alto livello e integrità morale. Noi discutiamo del nostro lavoro con altre persone senza temere che ci venga rubato, e i risultati delle ricerche vengono apertamente comunicati prima della pubblicazione formale. Le procedure editoriali sono corrette e adeguate, e il lavoro di un matematico conquista la fama per via del suo merito e non per come viene promosso. Queste sono le norme seguite dalla grande maggioranza dei matematici. Le eccezioni sono rare e non passano inosservate.

Parole forti, che la maggior parte dei presenti interpretarono come un commento sugli eventi riguardanti la congettura di Poincaré che erano stati riportati dalla stampa.[3]

Dopo gli interventi di vari dignitari, Ball annunciò in ordine alfabetico le quattro medaglie Fields. La seconda era stata assegnata a Grigori Perelman, «per i suoi contributi alla geometria e le sue rivoluzionarie intuizioni sulla struttura analitica e geometrica del flusso di Ricci».[4] Una grande foto di Perelman, simile a un profeta del Vecchio testamento, balenò davanti agli occhi del pubblico. Ball interruppe gli applausi: «Sono profondamente rammaricato che il dottor Perelman abbia declinato l'accettazione della medaglia Fields». Seguì qualche applauso isolato — in approvazione della decisione di assegnare ugualmente la medaglia a Perelman nonostante la sua scelta di rifiutare il premio —, dopodiché calò il silenzio, accompagnato da un appena percepibile collettivo sospiro di sollievo.

La premiazione fu seguita da un ricevimento offerto dalla città di Madrid. Dopo pranzo, ci furono alcune brevi presentazioni del lavoro dei medaglisti Fields. John Lott riassunse i risultati di Perelman, sottolineando sia la loro novità, sia la straordinaria abilità tecnica del matematico russo.

In seguito, Richard Hamilton tenne il primo intervento davanti all'assemblea plenaria. In un discorso straordinariamente lungo, Hamilton presentò le proprie ricerche sul flusso di Ricci, la tecnica che lui stesso aveva introdotto e che rappresentava il lavoro della sua vita. Raccontò di come l'idea di usare il flusso di Ricci gli era venuta dopo aver ascoltato, quattro decenni prima, una lezione di James Eells. «L'ipotesi è che non c'è spazio per la topologia» disse, riferendosi all'ipotesi per la quale non ci sono cicli che non possano essere ridotti a un punto e che, di conseguenza, non c'è nulla che i topologi possano manipolare: «E così, forse noi [analisti] possiamo aiutarli [i topologi] a uscire da questo problema». L'analista Hamilton può essere perdonato per questa sua soddisfazione nel raccontare come l'analisi venisse in soccorso della topologia. Un secolo prima, Poincaré aveva inventato la topologia algebrica per venire in soccorso degli analisti, confusi di fronte al comportamento caotico che emergeva nelle equazioni che governavano il moto dei pianeti. Con il suo ricorso all'analisi per risolvere il più grande problema della topologia, Perelman era così venuto a ripagare, con gli interessi, un debito vecchio di un secolo.

Hamilton spiegò più dettagliatamente la nozione chiave di entropia che Perelman aveva introdotto per dimostrare il teorema critico del non-collasso che rendeva possibile l'uso del flusso di Ricci per scomporre una varietà in pezzi geometrici. Anche se lui stesso e i suoi colleghi avevano in seguito individuato alcune semplificazioni, Hamilton sottolineò che le argomentazioni di Perelman erano del tutto corrette. «Sono veramente molto grato a Grisha per aver fatto questo lavoro» commentò. «Avevo lottato con le unghie e coi denti per ottenere [soluzioni non-collassanti] in qualche singolo caso. Ora non devo più preoccuparmi di questa cosa.» La presentazione un po' tecnica di Hamilton delle prove di Perelman rese chiaro a tutte le persone che affollavano l'auditorium quanto fossero straordinarie e rivoluzionarie quelle argomentazioni. «Penso di essere sorpreso come chiunque nel vedere il funzionamento di tutto questo lavoro» riflettè. «Sono enormemente riconoscente verso Grisha per averlo portato a termine.»

Queste parole di meraviglia e di gratitudine sarebbero state riprese in altri interventi durante il

congresso. Due giorni dopo, il preside del dipartimento di matematica della Columbia University, il celebre geometra algebrico John Morgan, parlò della congettura di Poincaré per il grande pubblico. Studioso molto stimato e molto cauto, Morgan era stato pesantemente coinvolto nel controllo dei risultati di Perelman. Parlò lentamente e con chiarezza, in modo da essere compreso da tutti i presenti (nel pubblico c'erano persone di diverse lingue). Ogni sedia dell'enorme auditorium era occupata, e il pubblico si sforzava di afferrare ogni sua singola parola. Per cancellare ogni possibile dubbio, Morgan annunciò categoricamente: «Grigori Perelman ha risolto la congettura di Poincaré». La tensione si sciolse in un applauso.

Morgan presentò brevemente la storia della congettura, osservando che era collegata alla maggior parte dei progressi nella geometria e nella topologia compiuti durante il XX secolo. Egli salutò la prova come una «stupenda conquista» non solo per Perelman, ma per l'intera matematica. Ogni passo avanti nella comprensione della congettura aveva dato origine a contributi matematici sostanziali e aveva portato le persone coinvolte — tra cui Milnor, Smale, Freedman, Donaldson, Thurston e Yau — a vincere la medaglia Fields. Morgan parafrasò l'autovalutazione di Isaac Newton[5] sottolineando che Perelman era salito in piedi sulle spalle di giganti: in particolare, di Richard Hamilton, che in più di 25 anni di scrupoloso lavoro aveva gettato le fondamenta del flusso di Ricci. «Ora tutto è stato accuratamente controllato» ripetè nuovamente Morgan: Perelman «ha dimostrato la congettura di Poincaré». Il suo compiacimento di fronte alla soluzione del problema era evidente a tutti.

E per quanto riguarda il premio del millennio? Rivolgendosi ai giornalisti presenti a Madrid, il presidente del Clay Institute, James Carlson, dichiarò che il periodo di attesa di due anni era iniziato con la comparsa delle tre esposizioni riportate sulla home page dell'istituto. Anche se Perelman non aveva pubblicato i suoi scritti su una rivista di fama mondiale, le esposizioni del suo lavoro erano state accuratamente esaminate e valutate.[6] Carlson rese chiaro che, come il comitato per la medaglia Fields, se l'istituto avesse deciso di assegnare un premio a Perelman, glielo avrebbe assegnato comunque, indipendentemente dalla sua accettazione o dal suo rifiuto.

Tenendo presenti il conferimento della medaglia Fields e le relazioni di Lott, Hamilton e Morgan, non c'è praticamente dubbio che Perelman sarà uno dei vincitori del premio del millennio. La difficile decisione sul se e come suddividere il premio spetterà al comitato consultivo del Clay Institute. Soltanto il tempo ci dirà che decisione prenderanno e se Perelman accetterà o meno questo riconoscimento.

Alla chiusura del congresso emersero ulteriori dettagli intorno a Perelman. Il matematico aveva lasciato la sua cattedra allo Steklov. Perelman, di origine ebraica, viveva con sua madre; sua sorella e suo padre erano emigrati in Israele. Le indiscrezioni iniziali secondo cui la sua scelta di declinare la medaglia Fields rappresentava un rifiuto della comunità matematica sembrano essere infondate. Come Gauss, Perelman si tiene alla larga dai riflettori e non vuole parlare per conto della matematica. Fortunatamente (e a differenza di Gauss), egli ha messo per iscritto il suo lavoro a beneficio di tutti noi e si è messo a disposizione di Morgan e di altri per rispondere via e-mail a occasionali richieste di chiarificazione.

La piena portata dell'opera di Perelman verrà compresa nei prossimi decenni, man mano che ci inoltreremo nel nuovo millennio. Stando alle ipotesi di Morgan, il lavoro di Perelman potrebbe permettere di usare il flusso di Ricci per studiare le varietà 4-dimensionali, e le tecniche del matematico russo potrebbero essere sfruttate per far progressi su altri tipi di equazioni differenziali paraboliche. La storia ci ha ripetutamente mostrato che i progressi nella risoluzione delle equazioni alle derivate parziali conducono a straordinarie applicazioni pratiche.

Inoltrandoci ancor di più nel campo delle speculazioni, gli articoli di Perelman suggeriscono che il flusso di Ricci è più di un semplice strumento analitico per ottenere informazioni geometriche sulle varietà: esso è un oggetto geometrico in senso proprio e ci permette di unire varietà con differenti topologie su differenti scale. Nel suo intervento dedicato ai «Problemi matematici nella relatività generale», tenuto il giorno dopo il discorso di Morgan, la grande fisica matematica francese Yvonne Choquet-Bruhat discusse la necessità di varietà modellate sullo spazio-tempo che differissero su scale diverse: l'analogo spaziotemporale di ciò che Perelman aveva preso in

considerazione nel caso dello spazio puro. Il lavoro di Perelman ci potrebbe fornire nuovi strumenti concettuali per pensare lo spazio e il tempo.

Ci sono voluti più di cent'anni per risolvere il problema che Poincaré aveva sollevato nell'ultima pagina dell'ultima sezione dell'ultimo dei suoi grandi articoli topologici. In questo intervallo, la topologia è cresciuta fino a diventare una disciplina forte e coerente di importanza centrale per la matematica e le scienze. La matematica su cui si basavano le riflessioni di Poincaré ebbe inizio 5000 anni fa nell'odierno Iraq, che allora era Babilonia. L'antica matematica venne tramandata ed elaborata di generazione in generazione, attraverso i greci che abitavano sulle isole davanti alle coste dell'odierna Turchia e i loro successori ad Atene e Alessandria, gli studiosi jainisti e induisti in India, le culture musulmane fiorite a est e a sud del Mediterraneo, le società multietniche sviluppatesi in Spagna e in Sicilia e, quindi, le culture giudaico-cristiane europee all'inizio dell'era moderna e nel periodo illuminista.

Il lavoro di Poincaré, a sua volta, preparò il terreno su cui potè fiorire la matematica del XX secolo. Non meno di quattro dei problemi del millennio sono direttamente collegati con l'opera da lui avviata. Solo da poco abbiamo iniziato a comprendere pienamente ciò che lui aveva già intravisto a cavallo fra l'Ottocento e il Novecento.

Noi viviamo nell'epoca matematicamente più produttiva che la storia umana abbia mai avuto. Ed è una grande soddisfazione sapere che i grandiosi risultati di Thurston, Hamilton e Perelman alimenteranno la ricerca di una nuova era. La matematica è il lavoro di singoli individui. I suoi concetti e i suoi teoremi, però, non appartengono a singole persone o a singoli gruppi etnici, religiosi o politici. Essi appartengono a tutti noi. Il sapere matematico si basa su ciò che è stato costruito da coloro che ci hanno preceduti. È un sapere conquistato a fatica, e noi spesso non lo apprezziamo come dovremmo. Chiunque abbia fatto almeno le elementari è in grado di risolvere problemi aritmetici e algebrici di fronte ai quali i più istruiti scribi babilonesi sarebbero rimasti bloccati. Chiunque abbia seguito qualche corso di calcolo infinitesimale e di algebra lineare può risolvere questioni che Pitagora, Archimede o anche Newton non avrebbero saputo come affrontare. Uno studente specializzando di oggi è in grado di gestire calcoli topologici che Riemann e Poincaré non avrebbero potuto nemmeno iniziare. Ciò non significa che noi siamo più intelligenti di loro. Significa, piuttosto, che godiamo dei benefici del loro lavoro.

La matematica ci ricorda quanto dipendiamo l'uno dall'altro, sia dalle intuizioni e dall'immaginazione di coloro che ci hanno preceduti, sia da coloro che formano le istituzioni sociali e culturali, le scuole e le università, che forniscono ai giovani un'istruzione che li mette in grado di comprendere pienamente le idee del loro tempo. E compito di tutti noi assicurarci che la società che lasceremo ai posteri sia una comunità che sa amministrare e sviluppare il nostro condiviso patrimonio scientifico. La matematica, infatti, è una delle attività caratteristiche dell'uomo, un'attività che ci rende più pienamente umani e che, nel far questo, ci porta a trascendere noi stessi.

Di notte, quando guardo in cielo le stelle più remote, le lontane galassie e i gruppi di galassie, trovo impossibile pensare che lassù, da qualche parte, non ci siano altre intelligenze, alcune profondamente diverse dalla nostra. Fra centinaia di anni, se mai svilupperemo delle tecnologie che ci metteranno in grado di incontrare queste forme di vita e di comunicare con loro, scopriremo che esse sanno, o vogliono sapere, che l'unica varietà tridimensionale compatta in cui ogni ciclo può essere ridotto a un punto è la 3-sfera. Potete contarci.

Note

1. Cambridge, aprile 2003

1. Si tratta dell'equazione del flusso di Ricci: $\partial_t(g_{ij}) = -2\mathbf{R}_{ij}$.
2. L'unico problema di fama comparabile è l'«ipotesi di Riemann», che rientra a sua volta fra i sette problemi del nuovo millennio. La congettura di Poincaré e l'ipotesi di Riemann sono stati i due problemi che ogni matematico consultato ha elencato come candidati per il titolo di problemi del millennio.
3. Riguardo al Clay Institute, il sito web www.claymath.org riporta uria serie di informazioni sulla sua missione e la sua storia. Ulteriori notizie sulla fondazione dell'istituto si possono trovare in A. Jaffe, *The Millennium Grand Challenge in Mathematics,* «Notices of the American Mathematical Society» 53, n. 6, 2006, pp. 652-60.
4. L'indirizzo del sito in questione è www.math.lsa.umich.edu/-lott/ ricciflow/perelman.html.

2. La forma della Terra

1. Lucio Cecilio Firmiano Lattanzio (c. 250-325 d.C.) era un professore di retorica di Nicomedia che si convertì al cristianesimo, perse il suo lavoro e, in seguito, divenne il precettore di uno dei figli di Costantino e un famoso apologeta cristiano. Per ulteriori notizie sulla sua vita, si veda l'edizione online della *Catholic Encyclopedia* del 1917, all'indirizzo www.newadvent.org/cathen. Per gli studi e i riferimenti bibliografici recenti, si veda la bibliografia a cura di Jackson Bryce, consultabile online all'indirizzo www.acad.carleton.edu/curricular/CLAS/lactantius/biblio.htm. Il passo citato è tratto da *Popular History of the United States* di J. J. Anderson (Clark & Maynard, New York 1880), ed è una parafrasi della parafrasi di Lattanzio fatta da Irving. Di fatto, Lattanzio credeva effettivamente in una Terra piatta, ma la sua era un'opinione di minoranza e i suoi scritti non erano comunque disponibili nella Spagna del 1490.
2. W. Irving, *Life and Voyages of Columbus,* John Murray, Londra 1830 [trad. it. *Storia della vita e viaggi dì Cristoforo Colombo scritta da Washington Irving americano,* Tipografia Coen, Firenze 1829-30] ; si veda anche la nuova edizione a cura di J. H. McElroy, Twayne Publishers, Boston 1981.
3. Eccellente scrittore, il docente di Harvard Samuel Eliot Morison (1887-1976) è uno degli storici americani più famosi e più amati. La sua memorabile descrizione del ritratto di Colombo presentato da Irving come una sciocchezza e una calunniosa assurdità è tratta dal suo libro *Admiral of the Ocean Sea,* Little & Brown, Boston 1942, pp. 88-89 [trad. it. *Cristoforo Colombo: ammiraglio del mare oceano,* il Mulino, Bologna 1985]. Stranamente, nonostante la critica morisoniana contro Irving, il mito secondo cui nel Medioevo gli studiosi e le persone colte credevano che la Terra fosse piatta è sorprendentemente duro a morire. Per una magnifica spiegazione dell'influenza di Irving e della persistenza di questo mito, si veda J. B. Russell, *Inventing the Flat Earth: Columbus and Modern Historians,* Praeger Publishing, Westport 1991.
4. Eratostene fissò la misura della circonferenza terrestre in 250.000 stadi. Assumendo che uno stadio corrisponda a 157,2 metri (un valore controverso, che alcuni storici ricavano da Plinio), la misura indicata da Eratostene sarebbe quindi di 39.300 chilometri, con uno scarto inferiore al 2 per cento rispetto al dato attuale (40.009 chilometri).
5. Il passo citato è ripreso da Cristoforo Colombo, *Lettere ai Reali di Spagna,* Sellerio, Palermo 1991, p. 55. Commentandolo nel suo *Early Man and the Ocean: A Search far the Beginnings of Navigation and Seaborne Civilizations,* Doubleday, Garden City (NY) 1979, p. 147, T. Heyerdahl — che si rifà a una traduzione danese di C. V. Ostergaard di Caddeo, *Giornale di Bordo di Cristoforo Colombo 1492-93* — sottolinea che l'ipotesi di Colombo diventa molto sensata se si tengono presenti le sue convinzioni

secondo cui i vichinghi avevano raggiunto la parte più a nord dell'Asia e lui stesso aveva abbreviato il viaggio per arrivare fino alle Molucche (a est dell'India) passando per la parte settentrionale di un mondo fatto a pera anziché attorno al rigonfiamento costituito dall'emisfero meridionale.

6. Anche se ci sono numerose biografie di Pitagora, i dettagli della sua vita rimangono molto oscuri e contraddittori. Si veda, per esempio, P. Gorman, *Pythagoras: A Life,* Routledge & K. Paul, Londra-Boston 1979.
7. Per quanto riguarda la matematica egiziana e babilonese, si possono consultare le due seguenti, attendibili opere: O. Neugebauer, *The Exact Sciences in Antiquity,* Princeton University Press, Princeton 1952; e B. L. van der Waerden, *Science Awakening I: Egyptian, Babylonian, and Greek Mathematics,* trad. ingl. di A. Dresden con aggiunte dell'autore, Noordhooff, Leida 1975 [tit. orig. *Ontwakende Wetenschap, Egyptische, Babylonische en Griekse Wiskunde,* Noordhooff, Gröningen 1950]. *Mathematical Cuneiform Texts* (American Orientai Society, New Haven 1945) e *Vorlesungen über Geschichte der antiken mathematischen Wissenschaften* (Springer-Verlag, Berlino-New York 1969), entrambi di Neugebauer, contengono una gran quantità di ulteriori informazioni.
8. Il padre di Alessandro, Filippo, aveva portato a termine la conquista della Grecia nel 338 a.C. e aveva assunto Aristotele come insegnante privato del proprio figlio.
9. La data della distruzione della grande biblioteca di Alessandria è stata oggetto di molte dispute e rimane tuttora incerta. La maggior parte degli studiosi ritengono che la biblioteca principale sia stata distrutta nella guerra civile durante l'impero di Aureliano, nel III secolo d.C. (altri invece, seguendo Plutarco, attribuiscono la sua distruzione all'incendio del porto di Alessandria ordinato da Giulio Cesare tre secoli prima). La biblioteca gemella, nel vicino Serapeo (il tempio di Serapide), fu distrutta poco dopo il 391 d.C. in seguito a un decreto contro i culti pagani emanato dall'imperatore cristiano Teodosio.
10. Per un'ottima traduzione inglese, si veda *Claudius Ptolemy: The Geography,* a cura di E. L. Stevenson, Dover Publications, New York 1991 [per una traduzione italiana, si veda *Geografia di Claudio Tolomeo Alessandrino,* Venezia 1598; per un'edizione delle sole tavole, si veda invece *Claudii Ptolemaei Cosmographia: tavole della Geografia di Tolomeo,* presentazione di Lelio Pagani, Stella Polare, s.l. 1991].
11. La traduzione in latino del testo greco di Tolomeo venne iniziata dallo studioso bizantino Emanuele Crisolora (1335-1415) e fu portata a termine nel 1406 dal suo discepolo Jacopo d'Angelo.
12. Ferdinando Magellano partì per la sua circumnavigazione della Terra nel 1519 con una flottiglia di cinque navi e 235 uomini. Venne ucciso in battaglia al largo delle Filippine nell'aprile 1521. L'esploratore basco Sebastián Elcano prese il comando della spedizione e ritornò in Spagna, assieme a 17 superstiti, nel settembre 1522.

3. Mondi possibili

1. Anziché dire «superficie di un qualche solido», un matematico direbbe però «bordo di una qualche varietà tridimensionale».
2. Forse vi ricorderete di aver visto da qualche parte un nastro di Möbius, o di aver letto qualcosa in proposito. Si tratta dell'oggetto che ottenete quando prendete una striscia rettangolare di carta e incollate uno dei due lati corti all'altro dopo aver impresso a uno di essi una torsione di 180 gradi. È una varietà bidimensionale con un bordo. Il nastro di Möbius gode di molte proprietà curiose. Su di esso non è possibile distinguere coerentemente destra e sinistra: se prendete una figurina con una mano destra e una mano sinistra definite e la seguite nel suo movimento lungo il nastro, dopo un giro tornerà indietro con la destra e la sinistra invertite. Esso, inoltre, ha soltanto un lato: se iniziate a viaggiare lungo un lato, dopo aver percorso un intero giro vi ritroverete dalla parte opposta senza soluzione di continuità. Pertanto, il nastro di Möbius non potrebbe mai essere la superficie di qualcosa.

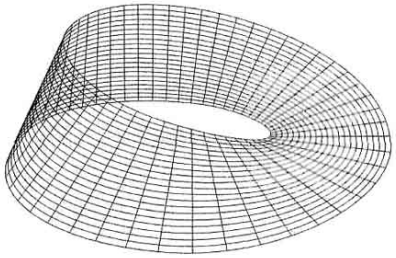


Figura 37: Il nastro di Möbius.

3. Se una varietà bidimensionale non è orientabile, ovvero non vi si può distinguere coerentemente destra e sinistra, essa contiene sempre un nastro di Möbius. Il bordo di un nastro di Möbius è costituito da una singola linea curva chiusa ed è quindi, topologicamente, un cerchio. Se attacchiamo un disco al nastro facendo corrispondere i punti del cerchio che costituisce il suo bordo con i punti del bordo del nastro di Möbius, otteniamo una varietà senza bordo (detta «piano proiettivo»). Un altro famoso esempio di varietà compatta senza bordo non orientabile è costituito dalla «bottiglia di Klein», in cui non c'è soluzione di continuità fra l'interno e l'esterno della superficie.

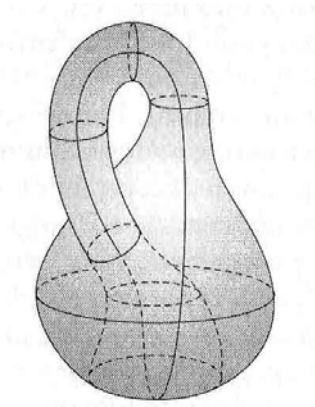


Figura 38: La bottiglia di Klein.

Per ottenerla, occorre congiungere assieme due nastri di Möbius facendo corrispondere i punti dei cerchi che costituiscono i loro bordi. La bottiglia di Klein e il piano proiettivo sono esempi di varietà bidimensionali che non possono essere la superficie di un solido.

4. Alcune superfici non possono rientrare nemmeno nello spazio tridimensionale e richiedono ulteriori dimensioni. La questione del numero di dimensioni che uno spazio deve avere per poter contenere una determinata superficie dà adito ad alcuni interessanti problemi matematici che qui non ci riguardano direttamente, ma che avremo occasione di citare in seguito.
5. Il termine «continue» rimanda a una condizione tecnica importante: una corrispondenza biunivoca tra due superfici è continua se ogni volta che un insieme di punti su una varietà tende a un punto dato, i punti corrispondenti sull'altra varietà tendono a loro volta al punto corrispondente al punto dato. (In particolare, punti vicini corrispondono a punti vicini; si noti però che non è necessario specificare che cosa si intende per «vicini».)
6. Il lettore attento noterà che abbiamo sorvolato su (almeno) tre questioni. In primo luogo, non è immediatamente evidente che il toro annodato sia omeomorfo al toro regolare. Stando alla nostra definizione, per dire che sono omeomorfi dobbiamo essere in grado di porre i loro rispettivi punti in corrispondenza biunivoca in modo tale che punti vicini dell'uno corrispondano a punti vicini dell'altro. Per vedere se ciò è possibile, immaginate di tagliare ciascun toro lungo una curva che descrive un cerchio attorno al suo collo solido. In entrambi i casi, otteniamo un cilindro delimitato da due cerchi (che, prima di tagliare il toro, erano lo stesso cerchio). I punti sui due cilindri possono essere messi in una corrispondenza biunivoca continua tale che i punti che non si trovano sui cerchi corrispondano gli uni agli altri, i punti sui cerchi corrispondano gli uni agli altri, e i punti vicini (che siano o meno sui cerchi) corrispondano ai punti vicini. In secondo luogo, vi potreste chiedere come facciamo a sapere che una sfera non è omeomorfa a un toro. Anche in questo caso, la risposta non è immediatamente evidente. Supponiamo che tra le due figure ci sia un omeomorfismo (vale a dire, una corrispondenza biunivoca continua). Scegliete una curva chiusa semplice (ossia, una curva che inizia e finisce al medesimo punto e che non interseca se stessa) sul toro che non venga a dividere il toro stesso in due parti. Per esempio, prendete una curva che descrive un cerchio attorno al collo. Sotto la condizione della corrispondenza biunivoca, dovremmo poter tracciare anche sulla sfera una curva chiusa semplice che non divida la sfera in due parti. Invece, ogni curva chiusa tracciata sulla sfera viene inevitabilmente a dividerla in due parti. (Per quanto possa sembrare chiaro, in realtà questo teorema — noto come il «teorema della curva di Jordan» — è sorprendentemente difficile da dimostrare.) Infine, non abbiamo ancora definito lo spazio tridimensionale. Lo faremo nel capitolo 4 e, più accuratamente, nel capitolo 7
7. La somma connessa di una qualunque varietà e di una sfera è la varietà da cui siamo partiti. Questo perché se ritagliamo un disco da una sfera, ciò che ci rimane è un disco e, quindi, fare la somma connessa

di una varietà con una sfera equivale a ritagliare un disco dalla varietà e poi incollare al suo posto un altro disco. Non cambia nulla. Nell'operazione di somma connessa, la sfera si comporta come l'«elemento identità» (ossia, si comporta come lo 0 nell'addizione o l'1 nella moltiplicazione).

8. Si possono classificare anche tutte le superfici non-orientabili. Esse risultano essere le somme connesse delle superfici orientabili e di superfici omeomorfe al piano proiettivo (definito nella nota 3). Per una rigorosa enunciazione di questo teorema — accompagnata da una sua moderna dimostrazione —, si veda l'appendice di J. Weeks, *The Shape of Space,* 2ª ed., Marcel Dekker, New York-Basilea 2002.
9. V. I. Arnold, *On Teaching Mathematics,* «Russian Mathematical Surveys» 53, n. 1, 1998, pp. 229-36. Tra parentesi, questo articolo è una splendida filippica di uno dei più grandi matematici dei nostri tempi contro l'assurdità di gran parte dell'insegnamento della materia.
10. Tecnicamente, diciamo che un ciclo su una varietà è definito come una mappa continua f dell'intervallo $1=\{x:0\leq x\leq 1\}$ nella varietà tale che $f(0)=f(1)$. Diciamo che un ciclo può essere *ridotto a un punto* se c'è una mappa continua F del rettangolo $\{(x,t):0\leq x,t\leq 1\}$ tale che $F(x,0)=f(x)$ (il ciclo originale) per ogni x, $F(0,r)=f(0)$ per ogni t, e $F(x,1)=f(0)$ per ogni x. Quindi, con t fisso, F(x,t) è un ciclo che comincia e finisce in corrispondenza del medesimo punto.

4. La forma dell'universo

1. Archita, citato da Simplicio nel suo Commentario alla Fisica di Aristotele; in H. Diels e W. Kranz (a cura di), *I Presocratici. Testimonianze e frammenti,* trad. it., 2 voll., Laterza, Roma-Bari 1986, vol. 1, frammento 47 A24, p. 491.
2. Più tecnicamente, una corrispondenza biunivoca fra due 3-varietà è continua se ogni volta che un insieme di punti su una varietà tende a un punto dato, i punti corrispondenti sull'altra varietà tendono a loro volta al punto corrispondente al punto dato.
3. L'analogo del piano concepito da Euclide è chiamato «3-spazio euclideo» o, più semplicemente, «3-spazio». Una definizione più formale verrà presentata nel capitolo 7.
4. Si vedano M. Peterson, *Dante and the 3-Sphere,* «American Journal of Physics» 47, 1979, pp. 1031-35; e R. Osserman, *Poetry of the Universe,* Doubleday, Garden City (NY) 1995 [trad. it. *Poesia dell'universo: l'esplorazione matematica del cosmo,* TEA, Milano 2000]. Sembra che questo fatto sia stato notato molti anni fa dal matematico Andreas Speiser nel suo libro *Klassische Stücke der Mathematik,* Verlag Orell Füselli, Zurigo 1925. Quest'ultimo testo è citato nell'articolo di J. J. Callahan, *The Curvature of Space in a Finite Universe,* «Scientific American» 235, agosto 1976, pp. 90-100. Ho ripreso questi riferimenti da M. Peterson.
5. Tracciamo una mappa di un viaggio nell'universo in cui rimaniamo alla stessa distanza dai tori interno ed esterno, ma ci spostiamo lungo un cerchio perpendicolare all'asse comune dei tori concentrici. In questo modo, veniamo a percorrere un ciclo che non può essere ridotto a un punto. Inoltre, questo ciclo è indipendente — è costruito secondo una precisa procedura essenzialmente diversa — da quel primo tipo di ciclo irriducibile a cui accennavamo nel testo. Nella varietà che abbiamo costruito identificando i bordi interno ed esterno di un guscio sferico, invece, non possiamo ottenere due cicli che siano indipendenti in questo senso e nessuno dei quali possa essere ridotto a un punto: in altri termini, tutti i cicli irriducibili sono del medesimo tipo, quello illustrato nel testo e ottenuto passando attraverso le due sfere bordanti, e sono diversi solo nel senso che il passaggio avviene attraverso punti diversi.

5. La geometria di Euclide

1. Per un buon riassunto della vita e dell'opera di Euclide, con riferimenti accurati, si veda I. Bulmer-Thomas, «Euclid», in C. C. Gillispie (a cura di), *Dictionary of Scientific Biography,* Scribner, New York 1971. Si veda inoltre l'articolo di J. J. O'Connor ed E. E Robertson disponibile nel sito web ospitato dall'Università di St. Andrews (www.history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/Euclid.html). Questo sito presenta le biografie di molti matematici, oltre a numerosi articoli su particolari questioni della storia della matematica. Nel corso degli anni è diventato progressivamente più accurato e più accademico, e oggi costituisce una fonte di informazioni estremamente utile.
2. Riprese dal sito web www.matematicamente.it/storia/euclide.htm. Per un'edizione italiana dell'opera, si veda Euclide, *Gli elementi,* a cura di A. Frajese e M. Maccioni, UTET, Torino 1970.
3. Come vedremo, più di due millenni dopo — alla fine del XIX secolo —, riscrivendo l'opera di Euclide, il

grande matematico di Gottinga David Hilbert aggiunse alcuni «assiomi di ordine» proprio per porre rimedio alle lacune come questa.

4. Si veda, per esempio, J. Gray, *Ideas of Space: Euclidean, Non-Euclidean, and Relativistic,* Oxford University Press, Oxford-New York 1979.
5. L. Russo, *La rivoluzione dimenticata: il pensiero scientifico greco e la scienza moderna,* Feltrinelli, Milano 1997.
6. I libri intitolati *Dati, Sulla divisione delle figure, Ottica* e *Fenomeni* sono sopravvissuti, mentre *Sui luoghi superficiali, Porismi, Sulle coniche, Pseudaria* ed *Elementi di musica* sono andati perduti.
7. Entrambe queste traduzioni vennero poi rivedute, e ne furono fatte altre. Solo la seconda, curata e quasi certamente in gran parte riveduta da al-Nayrizi, è sopravvissuta fino a oggi in un manoscritto conservato a Leida
8. Si veda, per esempio, C. H. Haskins, *The Rise of Universities,* ristampa, Cornell University Press, Ithaca 1957, pp. 1-2.
9. L'invenzione della macchina tipografica è spesso attribuita a Johann Gütenberg, nel 1455. In realtà, la storia è assai più complicata. Si veda, per esempio, A. Johns, *The Nature of the Book: Print and Knowledge in the Making,* University of Chicago Press, Chicago 1998.
10. Si veda il passo di van der Waerden che viene citato nell'articolo di J. J. O'Connor ed E. E Robertson sul loro sito web (www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/Euclid.html).
11. Sia Simson sia Playfair erano scozzesi. Robert Simson (1687-1768) divenne professore all'Università di Glasgow nel 1710 e approntò un'edizione degli *Elementi* (contenente i libri 1-6, 11 e 12) che avrebbe avuto settanta edizioni, la prima in latino e tutte le successive in inglese. John Playfair (1748-1819), professore di matematica — e, in seguito, di filosofia naturale — all'Università di Edimburgo, pubblicò un'edizione inglese dei libri geometrici degli *Elementi* (che ebbe un grande successo) nella quale, per semplificare le argomentazioni, ricorreva sistematicamente alla notazione algebrica.
12. Si veda J. Murdoch, «Euclid: Transmission of the Elements», in C. C. Gillispie (a cura di), *Dictionary of Scientific Biography,* citato in nota 1. Questo articolo contiene un diagramma che indica la filiazione delle differenti versioni degli *Elementi* che circolavano nel Medioevo. Anche la consultazione delle note riportate nella traduzione di T. L. Heath (*The Thirteen Books of Euclid's Elements,* Dover, New York 1956) può risultare utile.
13. Si veda «Excursus II: Popular Names for Euclidean Propositions», a p. 415 nella seconda edizione della traduzione di T. L. Heath.
14. Il riferimento è ai commentari di Gemino di Rodi (10-60), Erone (c. 10-75) e Pappo (c. 290-350) di Alessandria e Porfirio di Tiro (233-309).

6. I non-euclidei

1. Dire che il quinto postulato è equivalente al postulato di Playfair significa dire che è possibile dimostrare il postulato di Playfair partendo dai cinque postulati di Euclide e che, viceversa, è possibile dimostrare il quinto postulato di Euclide (come una proposizione) assumendo i primi quattro postulati euclidei e il postulato di Playfair.
2. Aristotele, *Primi analitici,* libro II, cap. 16, 65a 1 sgg., in Aristotele, *Opere,* trad. it., Laterza, Roma-Bari 1988, vol. 1, pp. 232-33.
3. G. Saccheri, *Euclid ab omni naevo vindicatus,* tipografia di Paolo Antonio Montano, Milano 1733 [trad. it. *Euclide liberato da ogni macchia,* Bompiani, Milano 2001].
4. Giorgio II fondò anche l'Università di Princeton. Istituita nel 1746, Princeton era allora conosciuta come il College del New Jersey ed era l'unica realtà accademica nelle colonie a specificare esplicitamente di essere aperta alle persone di qualunque appartenenza religiosa.
5. Dalla prefazione di A. Kästner, *Mathematische Anfangsgründe,* Gottinga 1758-1797. Il passo è citato in W. B. Ewald, *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics,* Oxford University Press, New York 1996, vol. 1, p. 154.
6. L'assioma di Wallis afferma che, data una qualsiasi figura, se ne può sempre costruire un'altra simile di grandezza arbitraria. Le figure simili sono poligoni con lo stesso numero di lati che godono della proprietà per cui gli angoli corrispondenti sono uguali e le lunghezze di tutte le coppie di lati corrispondenti risultano in proporzione.
7. G. S. Klügel, *Conatum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrandi recensio,* s.l., 1763, p. 16.
8. In particolare, Lambert dimostrò che il numero π (il rapporto fra la circonferenza di un cerchio e il suo

diametro) non è un numero razionale (ossia, come la radice quadrata di 2, non può essere scritto come un quoziente di due numeri interi). Questa dimostrazione rappresentò una grande conquista.

9. I. Kant, «Risposta alla domanda: che cos'è l'illuminismo», in *Che cos'è l'illuminismo?,* trad. it., Editori Riuniti, Roma 1987, p. 48.
10. Per un eccellente studio biografico e accademico dell'opera di Gauss, si veda W. K. Bühler, *Gauss: A Biographical Study,* Springer-Verlag, Berlino-New York 1981. Il libro contiene una bibliografia riccamente commentata.
11. Il Collegium Carolinum.
12. Si veda G. B. Halsted, *Biography, Bolyai Farkas [Wolfgang Bolyai],* «American Mathematical Monthly» 3, 1896, pp. 1-5.
13. Si veda la biografia di János Bolyai a cura di J. J. O'Connor ed E. F. Robertson, consultabile al sito web www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bolyai.htm.
14. C. F. Gauss, *Werke,* K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Gottinga 1863-1933, vol. 8, p. 119.
15. Citazione attribuita a Gauss da J. J. O'Connor ed E. E Robertson, www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Quotations/Gauss.html.
16. Citato in V. Kagan, *N. Lobachevsky and His Contribution to Science,* Foreign Languages Publishing House, Mosca 1957.
17. La traduzione italiana di diversi saggi di Bolyai e Lobačevskij, assieme a molti altri materiali, può essere letta in R. Bonola, *La geometria non-euclidea. Esposizione storico-critica del suo sviluppo,* Zanichelli, Bologna 1906.
18. C. E Gauss, *Werke,* citato in nota 14, p. 221. La corrispondenza fra Gauss e Farkas Bolyai è stata opportunamente raccolta in C. E Gauss, *Briefwechsel zwischen Carl Friedrich Gauss und Wolfgang Bolyai,* B. G. Teubner, Lipsia 1899.
19. Citato nella biografia di Farkas Bolyai curata da J. J. O'Connor ed E. E Robertson, www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/ Bolyai_Farkas.html.

7. La lezione di abilitazione di Bernhard Riemann

1. L'«ipotesi di Riemann» è un famoso problema sul quale torneremo in seguito e per la cui soluzione il Clay Institute ha offerto un altro premio da un milione di dollari. L'ipotesi di Riemann è una congettura sulla distribuzione degli zeri della funzione zeta di Riemann $\zeta(s)$. L'andamento della funzione zeta (e in particolare la distribuzione dei suoi zeri) risulta quindi legata alla distribuzione dei numeri primi immersi nell'insieme dei numeri naturali. Tre di questi libri riguardano l'ipotesi di Riemann e sono: J. Derbyshire, *Prime Obsession: Bernhard Riemann and the Greatest Unsolved Problem in Mathematics,* Joseph Henry Press, Washington 2001 [trad. it. *L'ossessione dei numeri primi. Bernhard Riemann e il principale problema irrisolto della matematica,* Bollati Boringhieri, Torino 2006]; K. Sabbagh, *The Riemann Hypothesis: The Greatest Unsolved Problem in Mathematics,* Farrar-Straus-Giroux, New York 2002; e M. du Sautoy, *The Music of the Primes: Searching to Solve the Greatest Mystery in Mathematics,* HarperCollins, New York 2003 [trad. it. *L'enigma dei numeri primi,* Rizzoli, Milano 2005]. Derbyshire, in particolare, fa un ottimo lavoro di presentazione della matematica per i lettori non specialisti. L'ipotesi di Riemann compare anche in un recente romanzo giallo (P.O'Shaughnessy, *A Case of Lies,* Random House, New York 2005). Per una presentazione straordinariamente bella e accurata della vita e dell'opera di Riemann (che richiede, comunque, una sostanziale preparazione matematica), si veda D. Laugwitz, *Bernhard Riemann 1826-1866: Wendepunkte in der Auffassung der Mathematik,* Birkhauser, Basilea 1996.
2. La Rivoluzione e Napoleone accrebbero ulteriormente la centralizzazione degli enti amministrativi ed educativi a Parigi. Anche ammesso che abbiano pensato di farlo, i francesi non sono mai riusciti a decentralizzare niente.
3. A. N. Whitehead, «Universities and Their Function», in *The Aims of Education and other Essays,* Macmillan, New York 1967, p. 93 [trad. it. *I fini dell'educazione e altri saggi,* La Nuova Italia, Scandicci 1992].
4. Tradotto in italiano, suonerebbe «Rivista di matematica pura e applicata».
5. La nostra odierna nozione di numero ha alle spalle una lunga e ricca storia su cui non ci possiamo soffermare in questa sede. Possiamo considerare come un «numero reale» qualunque numero — negativo, 0 o positivo — che può essere scritto nella numerazione decimale come un intero eventualmente seguito da un'espansione decimale potenzialmente infinita. I numeri 10,88901, π (=3,141592...), -1,412... (= $-\sqrt{2}$),

1000, 0 e -317,2 sono numeri reali. I numeri complessi sono ottenuti sommando i numeri reali con le radici quadrate di numeri negativi. Ogni numero complesso può essere scritto nella forma $a+ib$, dove $i=\sqrt{-1}$ e a e b sono numeri reali.

6. R. Dedekind, «Bernhard Riemann's Lebenslauf», in B. Riemann, *Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass,* 2ª ed., a cura di Heinrich Weber, Teubner, Lipsia 1892, p. 553.
7. Per esempio, disegniamo un segmento di questa retta, scegliamo il punto medio corrispondente a 0, fissiamo l'unità di lunghezza come pari a un centimetro e la direzione positiva come quella verso destra:

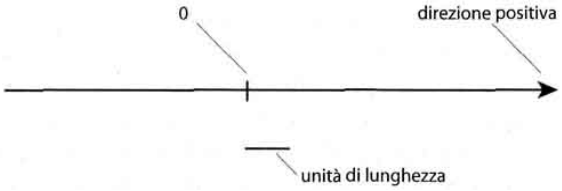


Figura 39: La scelta dello 0, dell'unità di lunghezza e della direzione positiva.

Al numero 1, associamo quindi il punto che si trova esattamente a 1 centimetro a destra dello 0. Al numero 2,25, associamo il punto a 2,25 centimetri a destra dello 0. Ai numeri negativi associamo invece i punti a sinistra dello 0: -1 è associato al punto che si trova esattamente a 1 centimetro a sinistra dello 0, -2,25 al punto a 2,25 unità a sinistra dello 0, e così via.

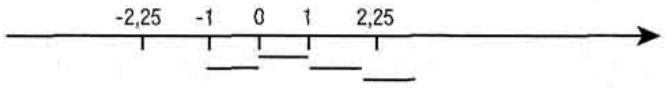


Figura 40: La retta numerica.

E dove si trova il numero 100.000? Non su questa pagina, ma là fuori, a 100.000 centimetri alla vostra destra.

8. Così, la coppia (2, 3) corrisponde al punto sul piano a due unità di lunghezza lungo la prima retta numerica nella direzione positiva e a tre unità di lunghezza lungo la seconda. La coppia (-1,2,2) corrisponde al punto situato a una unità a sinistra lungo la prima retta numerica e 2,2 unità nella direzione positiva parallela alla seconda retta numerica.

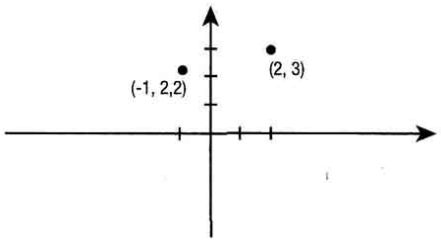


Figura 41: Il piano come coppie di numeri reali.

Si noti, tra parentesi, che l'ordine in cui i numeri compaiono è importante: con (2, 3) e (3, 2), noi intendiamo indicare due punti diversi! E lo sono realmente. Anche se avessimo orientato le nostre rette in modo differente, saremmo tuttavia sempre in grado di associare una coppia di numeri con un punto su una pagina di questo libro. In un caso o nell'altro, abbiamo sempre una corrispondenza tra coppie di numeri e punti su una pagina infinita che si estende in ogni direzione a partire dalla pagina di questo libro.

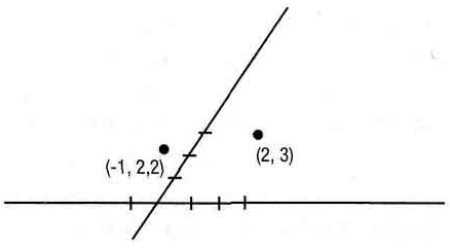


Figura 42: Un'altra corrispondenza fra le coppie di numeri reali e il piano.

9. È tradizione barare un po' e immaginare queste tre rette leggermente inclinate (magari con una forte luce dietro di esse e disegnando la loro ombra sul piano), così:

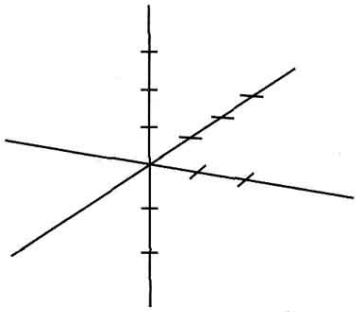


Figura 43: Rappresentare le triple di numeri reali.

10. Adottando la convenzione indicata nella nota precedente, indicheremo il punto corrispondente alla tripla (2, 3,-1) nel modo seguente:

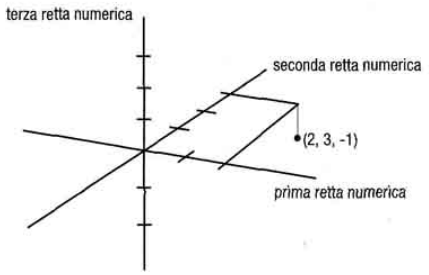


Figura 44: Indicare graficamente i punti corrispondenti a triple di numeri reali.

11. L'«analisi» è la branca della matematica che si occupa degli oggetti del calcolo infinitesimale: le funzioni, i limiti, le rapidità di variazione e ciò che succede quando le cose diventano arbitrariamente piccole o grandi. Si può pensare a una «funzione» come a una macchina che associa gli elementi di un insieme agli elementi di un altro. Il «calcolo infinitesimale» studia la variazione delle funzioni e ci offre un insieme di strumenti per determinare la rapidità di variazione di una funzione in corrispondenza di alcuni elementi di un insieme (in questo caso, si parla di «differenziazione») e, inversamente, per determinare una funzione data la sua rapidità di variazione per tutti gli elementi di un insieme (in questo caso, si parla di «integrazione»). Anche se l'idea di base è semplice, i dettagli possono essere molto complicati. Occorre prestare molta attenzione nel definire la rapidità di variazione (detta «derivata») di una funzione. Questa si rivela essere un altro oggetto matematico, spesso un'altra funzione, ma una funzione tra spazi differenti, ed è necessario procedere con accuratezza, specialmente quando gli spazi sono complessi. L'intero corso di base di calcolo infinitesimale studia i particolari tipi di funzioni che associano numeri reali a numeri reali (ossia, funzioni da **R**, o da un certo intervallo di **R**, a **R**). La derivata (la rapidità di variazione) di ogni funzione di questo genere per un numero reale è un numero.

12. Per i lettori che rammentano qualche nozione di calcolo infinitesimale, è possibile considerare una funzione da **R** a una varietà come se descrivesse un cammino nella varietà stessa: pensiamo ai numeri reali come al tempo, e al valore della funzione per ciascun momento di tempo come alla posizione di quel momento. Se la varietà è di dimensione n, la derivata di tale funzione per ogni momento di tempo sarà una n-pla. I matematici pongono una distinzione fra le n-ple che rappresentano derivate e le n-ple che rappresentano posizioni nella varietà: le prime sono chiamate «vettori» (velocità) e le seconde «punti». Possiamo immaginare l'insieme di tutti i vettori in corrispondenza di un punto di una varietà come l'insieme di tutte le velocità che le curve passanti per quel punto possono avere. L'insieme di vettori basati in ciascun punto di una varietà n-dimensionale sono in corrispondenza biunivoca con $\mathbf{R}^n$, e quindi possiamo pensare ciascun punto di una varietà n-dimensionale come se gli avessimo associato uno spazio di vettori velocità che è una copia di $\mathbf{R}^n$. Esso è detto lo «spazio tangente» alla varietà per quel dato punto, ed è semplicemente l'insieme di tutte le possibili velocità, o derivate, di qualunque curva passante per quel punto. Al fine di specificare una metrica, dobbiamo specificare la lunghezza di ciascun vettore velocità in corrispondenza di ciascun punto. Riemann scelse una classe di metriche particolarmente interessante, limitandosi alla classe di funzioni sullo spazio tangente a una varietà per ciascun punto che

fossero abbastanza restrittive da essere trattabili, ma anche abbastanza generali da catturare un'ampia gamma di fenomeni e da essere matematicamente interessanti.

13. Ossia, per definire il 2-spazio euclideo, definiamo la distanza fra due punti $(x_1\ y_1)$ e (x_2, y_2) di $\mathbf{R}^2$ come la radice quadrata positiva di $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$. Per definire $\mathbf{E}^3$, poniamo la distanza tra due punti (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2) di $\mathbf{R}^3$ come la radice quadrata positiva di $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$.
14. Per definizione, 1'*n*-spazio euclideo $\mathbf{E}^n$ è un *n*-spazio $\mathbf{R}^n$ con la distanza tra due punti $(x_1, ..., x_n)$ e $(y_1, ..., y_n)$ definita come la radice quadrata (positiva) di $(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2$. Questa è la generalizzazione del teorema di Pitagora per *n* dimensioni.

8. L'eredità di Riemann

1. Ovviamente, ciò è ben lungi dall'essere una dimostrazione (e oltretutto, per vederlo chiaramente, occorre avere una palla piuttosto grossa). È possibile costruire una dimostrazione rigorosa del fatto che le geodetiche di una sfera sono i suoi cerchi massimi in base a un ragionamento sulla simmetria. In alternativa, è possibile utilizzare il calcolo infinitesimale.
2. Dato che la Terra è quasi una sfera, le geodetiche si avvicinano molto all'essere cerchi massimi. Tuttavia, la Terra non è perfettamente sferica: essa è infatti un po' appiattita ai poli, e valli e montagne cambiano la curvatura in corrispondenza dei diversi punti. Pertanto, le geodetiche non coincidono perfettamente con i cerchi massimi, anche se (dato che montagne, valli e appiattimenti polari sono relativamente piccoli rispetto alla grandezza della Terra) vi si avvicinano molto.
3. In alternativa, possiamo raffigurarci la direzione in cui vogliamo andare come una piccola linea tangente alla sfera in corrispondenza del punto in cui ci troviamo. Ora, in $\mathbf{R}^3$ c'è soltanto un piano che accomuna una linea qualsiasi e un punto che non appartiene a quella linea. Quindi, c'è solo un singolo piano che passa attraverso il centro della sfera e contiene quella linea tangente che rappresenta la direzione in cui vogliamo muoverci. Questo piano intersecherà la sfera tracciando un cerchio massimo nella direzione desiderata. (Si tratta di un cerchio massimo in quanto il piano passa per il centro della sfera.)
4. Riemann ammette sfere di qualunque dimensione. In particolare, la 3-sfera sulla cui costruzione ci siamo soffermati a lungo nel capitolo 3 è esattamente omeomorfa all'insieme di punti equidistanti da un determinato punto in $\mathbf{E}^4$.
5. Un altro concetto che si basa sulla nozione di omeomorfismo — con il quale viene spesso confuso — è quello di equivalenza per «omeomorfismo d'ambiente». Quando classifichiamo le superfici dal punto di vista topologico, poniamo come unico requisito che l'omeomorfismo mappi una superficie sull'altra. Se stiamo considerando le superfici nel 3-spazio, poniamo l'ulteriore (e più forte) requisito che ci sia un omeomorfismo dal 3-spazio a se stesso, ossia una corrispondenza biunivoca tra le superfici in questione. Questa è anche la nozione appropriata di equivalenza per la teoria dei nodi (un toro e un toro annodato non sono necessariamente equivalenti).
6. Il termine «topologia» venne usato per la prima volta da Benedikt Listing (1808-82) nel suo libro *Vorstudien zur Topologie* (s.l. 1847). In precedenza veniva usata un'altra espressione, *analysis situs,* che significa «analisi del luogo» e che, di fatto, rimase di uso più comune fino agli anni Venti del Novecento. Nel suo libro, Listing definì la topologia come «lo studio delle leggi qualitative delle relazioni fra i luoghi» ed espresse la propria forte convinzione che quella nascente scienza fosse un oggetto meritevole di ricerca e che avrebbe condotto a importanti risultati: «Con il termine topologia, noi intendiamo quindi lo studio delle proprietà qualitative delle forme spaziali, o le leggi della connettività, della posizione reciproca e dell'ordine di punti, linee, superfici e corpi solidi *(così* come delle loro parti e delle loro unioni), astratte dalle loro connessioni con la misura o grandezza». Riemann contribuì moltissimo al progresso della topologia, anche se non la studiò per se stessa ma per le sue applicazioni all'analisi.
7. Per una storia dello sviluppo della topologia fino all'opera di Poincaré, si veda J. C. Pont, *La Topologie Algébrique des origines à Poincaré,* Presses Universitaires de France, Parigi 1974.
8. Il numero che viene di fatto usato dai matematici per indicare questa proprietà è chiamato «genere», ed è equivalente al numero massimo di curve chiuse semplici non intersecate che possono essere disegnate su una superficie senza separarla in due parti non connesse.
9. Anche se non è difficile rendersi conto del fatto che una mappa che conserva le distanze è un omeomorfismo, è spesso difficile stabilire le relazioni tra le diverse nozioni di equivalenza.
10. Si tratta di un teorema che è stato dimostrato per la prima volta da David Hilbert nel 1888.
11. La dimensione dev'essere un numero intero positivo, oppure l'infinito. Riemann ammette anche spazi «discreti», ma in questa sede non ci servono.

12. W. K. Clifford, *Mathematical Papers,* a cura di R. Tucker, Macmillan, Londra 1882, pp. 21-22 (pubblicato originariamente come W. K. Clifford, *On the Space - Theory of Matter,* «Proceedings of the Cambridge Philosophical Society» 2, 1876).
13. La trattrice è la curva tracciata sul piano dal capo di una corda di lunghezza fissa, inizialmente puntato verso l'alto, mentre l'altro capo della corda si sposta lungo una linea retta orizzontale.
14. Il racconto apparve nella raccolta di Fechner intitolata *Vier Paradoxe,* pubblicata nel 1846. Per ulteriori notizie, si veda l'introduzione di T. Banchoff all'edizione di *Flatland di* Abbott citata nella nota seguente.
15. Per due recenti edizioni inglesi, con note e saggi introduttivi scritti da due geometri, si vedano E. A. Abbott, *Flatland: A Romance of Many Dimensions,* introduzione e note di T. Banchoff, Princeton University Press, Princeton 1991 [trad. it. *Flatlandia. Racconto fantastico a più dimensioni,* Adelphi, Milano 2004]; ed E. A. Abbott, *The Annotated Flatland: A Romance of Many Dimensions,* introduzione e note di I. Stewart, Perseus, Cambridge (MA) 2002.
16. J. Collins, *Good to Great: Why Some Companies Make the Leap... and Others Don't,* HarperCollins, New York 2001.
17. B. Riemann, *Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass,* 2ª ed., a cura di Heinrich Weber, Teubner, Lipsia 1892, pp. 541-58.

9. Klein e Poincaré

1. Che il lavoro di Riemann fosse interamente concettuale, è comunque un mito: i suoi quaderni sono pieni zeppi di calcoli.
2. La figura di Bismarck non è comunque riducibile a quella di un inflessibile conservatore; egli creò la moderna rete di sicurezza sociale.
3. Non è corretto dare a Bismarck la colpa della Prima guerra mondiale. Il Kaiser Guglielmo II, che allontanò Bismarck poco dopo essere asceso al trono, ebbe responsabilità ben maggiori.
4. Anche il disastroso episodio dei Sette di Gottinga si volse in certo qual modo a vantaggio dell'università. Nel 1837, quando i Sette vennero allontanati dall'insegnamento, furono rimpiazzati. Anni dopo, quando vennero nuovamente assunti, il corpo docente crebbe di numero.
5. Per ulteriori notizie su Gottinga fra la fine del XIX e l'inizio del XX secolo, si vedano le biografie di C. Reid, *Hilbert,* Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlino 1970; e *Courant in Göttingen and New York, The Story of an Improbable Mathematician,* Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlino 1976. Numerose informazioni sono poi contenute negli articoli di D. E. Rowe, *Klein, Hilbert and the Göttingen Mathematical Tradition,* «Osiris» 5, n. 2, 1989, pp. 186-213; e *«Jewish Mathematics» at Göttingen in the Era of Felix Klein,* «Isis» 77, 1986, pp. 422-49.
6. Il testo tedesco venne stampato sotto forma di un piccolo pamphlet che non era facile da reperire. Venne tuttavia ripubblicato in seguito, e ne furono approntate una traduzione italiana e una francese che apparvero su importanti riviste. Una traduzione inglese di M. *W.* Haskell, *A Comparative Review of Recent Researches in Geometry,* apparve in «Bulletin of the New York Mathematical Society» 2, 1893, pp. 215-49, e fu poi ripubblicata in D. G. Saari (a cura di), *The Way It Was: Mathematics from the Early Years of the «Bulletin»,* American Mathematical Society, Providence 2003. [Per una traduzione italiana del programma di Erlangen, si veda E Klein, *Il programma di Erlangen,* La Scuola, Brescia 1998.]
7. Come esempi possiamo prendere l'insieme dei numeri interi con l'operazione di addizione, l'omeomorfismo di uno spazio con l'operazione di composizione, le permutazioni delle lettere di una determinata parola. La «teoria dei gruppi» è la branca dell'algebra che si occupa di questi problemi. Occorre evitare di credere che ogni insieme con una singola operazione sui suoi elementi sia un gruppo. Ci sono anche altri insiemi interessanti con una singola operazione che soddisfano differenti assiomi (semigruppi, monoidi, pseudogruppi). Vengono studiati anche gli insiemi con più di una operazione. A seconda degli assiomi soddisfatti dalle due operazioni e del modo in cui esse sono collegate, si possono ottenere anelli, campi, moduli, reticoli e altre strutture. Cosa esasperante, il termine «algebra» è usato anche per denotare una particolare classe di anello (così che un'«algebra» è un particolare esempio di una classe di strutture studiate dall'algebra).
8. Occorrono pseudogruppi e fasci di gruppi anziché gruppi.
9. H. Poincaré, *Sur les Functions Fuchsiennes,* «Comptes rendus de l'Académie des sciences» 92, 14 febbraio 1881, pp. 333-35; 93, 21 febbraio 1881, pp. 395-96; 94, 4 aprile 1881, pp. 859-61.
10. É possibile reperire con facilità notizie sulla vita di Poincaré. Tuttavia, nessuno ha ancora scritto una sua buona biografia critica. Per alcune interessanti ipotesi sulle ragioni di questo fatto, si veda G. Heinzmann,

Éléments *préparatoires à une biographie d'Henri Poincaré,* «Les Annales de l'Est» 51, n. 1, 2001, pp. 103-17. L'articolo di Heinzmann contiene anche un'eccellente — per quanto sintetica — presentazione dell'infanzia di Poincaré, con dettagliati riferimenti.

11. Raymond Poincaré (1860-1934) fu primo ministro dal 1912 al 1913, dal 1922 al 1924 e dal 1926 al 1929. Fu presidente dal 1913 al 1920.
12. Quaderni della sorella di Poincaré, Aline, reperto B 250, *Documents sur Poincaré,* Archives Henri Poincaré, Université de Nancy 2 (LPHS-AHP), p. 191. Citato in G. Heinzmann, *Eléments préparatoires à une biographie d'Henri Poincaré,* citato in nota 10.
13. *Ibid.,p.* 191.
14. G. Darboux, «Éloge Historique d'Henri Poincaré», letto in un intervento pubblico nel dicembre 1913, ripubblicato in H. Poincaré *et al., Œuvres de Henri Poincaré,* vol. 2, Gauthier-Villars, Parigi 1952.
15. C'è una divertente divergenza fra il racconto di Darboux su come Poincaré studiò diligentemente il tedesco recandosi al caffè così da poter leggere i giornali tedeschi e riferire a suo padre e agli altri che cosa c'era di nuovo, e la versione ricordata da sua sorella, secondo la quale Henri lo imparò perché il funzionario tedesco alloggiato presso di loro era solito sedersi nella parte più calda del salotto. Pur senza dirlo esplicitamente — ma è difficile non cogliere la maliziosa allusione —, Aline sta in qualche modo insinuando che suo fratello Henri avrebbe imparato qualunque cosa pur di poter condividere un po' di caldo.
16. Le *grandes écoles sono* un sistema di 160 piccole università, relativamente ben finanziate e con piani di studio preparati con attenzione. Esse hanno un rapporto numerico studenti-insegnanti estremamente favorevole (dai 160 istituti escono circa 11.000 laureati all'anno), tasse modeste e criteri di ammissione altamente selettivi, basati su esami scritti — e a volte anche orali — gestiti su base nazionale. Dalle *grandes écoles* escono quasi il 70 per cento degli amministratori e dei manager delle aziende francesi, e una percentuale ancora più alta dei funzionari statali di grado più elevato.
17. Anni dopo, Darboux, che era stato presidente della commissione esaminatrice, avrebbe scritto: «Fin dal primo sguardo, mi fu subito chiaro che si trattava di un lavoro fuori dall'ordinario e meritevole di ampia approvazione. Conteneva senza dubbio risultati sufficienti a fornire il materiale per molte buone tesi» (elogio funebre di Darboux, citato nella nota 14 di questo capitolo).
18. L'università fu ricostruita dopo la guerra e inaugurata nel 1957.
19. H. Poincaré, *Science et Méthode,* Flammarion, Parigi 1908, cap. 3 («L'invention mathématique»); il testo originale è consultabile, assieme a ulteriori scritti di Poincaré e di altri autori, al sito web www.ac-nancy-metz.fr/enseign/philo/textesph/default.htm [per una traduzione italiana, si veda H. Poincaré, *Scienza e metodo,* Einaudi, Torino 1997].
20. *Ibid.*
21. *Ibid.*
22. I tre supplementi al suo saggio per l'Accademia delle scienze di Parigi (28 giugno 1880, 6 settembre 1880 e 20 dicembre 1880) delinearono i concetti fondamentali della geometria non-euclidea e la loro relazione con le funzioni fuchsiane. Questi supplementi finirono dimenticati negli archivi dell'Accademia delle scienze di Parigi, dove furono riscoperti 99 anni dopo, nel dicembre 1979, da Jeremy Gray, allora studente specializzando (oggi è un rinomato storico della matematica). Per i testi di questi supplementi, accompagnati da un commentario storico, si veda J. J. Gray e S. A. Walter (a cura di), *Henri Poincaré, Three Supplementary Essays on the Discovery of Fuchsian Functions,* Akademie Verlag GmbH, Berlino-Albert Blanchard, Parigi 1997.
23. L'11 aprile, il celebre matematico svedese Gustav Mittag-Leffler, dopo aver dapprima scritto a Charles Hermite, scrisse anche a Poincaré. Sarebbero diventati amici per la vita. Mittag-Leffler stava progettando di fondare una nuova rivista matematica e invitò Poincaré a pubblicare lì i suoi scritti.
24. Le lettere sono state pubblicate nelle raccolte delle opere di Poincaré *(Œuvres,* vol. 2, citato in nota 14) e di Klein. La raccolta di opere di Poincaré include un lungo brano tratto da *La valeur de la science* e un passo del racconto della scoperta fatto da Klein (che differisce leggermente da quello del 1927).
25. I verbi francesi usati da Poincaré sono, rispettivamente, *«aperce-voir»* (scorgere, intravedere) e *«obtenir»* (ottenere). Essi hanno differenti connotazioni e il loro uso è il frutto di una deliberata scelta di Poincaré.
26. Nell'originale *«die elliptischen Modulfunktionen».*
27. Nell'originale *«Kreisbogenpolygone».*
28. Si ritiene che il motto sia un'allusione alla sconfitta di Carlo il Temerario davanti a Nancy nel 1477. Spesso viene tradotto colloquialmente in francese come *«Qui s'y frotte, s'y piqué»,* un'espressione che si potrebbe grossomodo rendere con «Intromettiti, e ti farai male», o «Provocami, e la pagherai».
29. E Klein, *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19 Jahrhundert,* Springer-Verlag, Berlino

1926 (tomo I) e 1927 (tomo II). Si veda in particolare a p. 249 del primo tomo: «Non possiamo che concludere che l'atmosfera di Gottinga, satura di implicazioni geometriche, abbia esercitato una forte influenza sull'impressionabile e dotato Riemann. L'ambiente in cui un uomo viene a ritrovarsi è ancora più importante dei fatti e delle conoscenze concrete che gli vengono offerte!». Una traduzione inglese (di M. Ackerman) del primo tomo, intitolata *Developments of Mathematics in the 19th Century,* è apparsa come vol. 9 della serie «Lie Groups: History, Frontiers and Applications», a cura di R. Hermann (Math Sci Press, Brookline 1979).

30. Qui di seguito riportiamo il testo completo della lettera. Il terzo paragrafo contiene affermazioni che Klein non avrebbe mai dimenticato. Klein aveva mandato a Poincaré le bozze di un articolo in cui annunciava un grande teorema, e Poincaré gli rispose che conosceva quel risultato già da tempo. Una volta ricevuta la nota di Klein, Poincaré si affrettò a mandare un annuncio a «Comptes Rendus». L'amarezza di Klein traspare chiaramente nell'estratto che accompagna le lettere nella raccolta delle opere francesi. A un secolo di distanza, ciò che è chiaro è che i due uomini «sapevano» entrambi che il risultato era vero, ma non erano propriamente in grado di dimostrarlo. Gli strumenti matematici necessari non erano ancora disponibili, e la dimostrazione vera e propria venne portata a termine da Poincaré e Paul Koebe solo nel 1910.

Paris, 4 Avril 1882
Je viens de recevoir votre lettre et je m'empresse de vous répondre. Vous me dites que vous désirez clore un débat stérile pour la Science et je ne puis que vous féliciter de votre résolution. Je sais qu'elle ne doit pas vous coûter beaucoup puisque dans votre note ajoutée à ma dernière lettre, c'est vous qui dites le dernier mot, mais je vous en sais gré cependant. Quant à moi, je n'ai ouvert ce débat et je n'y suis entré que pour dire une fois et une seule mon opinion qu'il m'était impossible de taire. Ce n'est pas moi qui le prolongerai, et je ne prendrais de nouveau la parole que si j'y étais forcé; d'ailleurs je ne vois pas trop ce qui pourrait m'y forcer. Si j'ai donné votre nom aux fonctions kleinéennes, c'est pour les raisons que j'ai dites et non pas comme vous l'insinuez, zur Entschädigung; *car je n'ai à vous dédommager de rien; je ne reconnaîtrai un droit de propriété antérieur au mien que quand vous m'aurez montré qu'on a avant moi étudié la discontinuité des groupes et l'uniformité des fonctions dans un cas tant soit peu général et qu'on a donné de ces fonctions des développements en séries. Je répond à une interrogation que je trouve en note à la fin d'une page de votre lettre. Parlant des fonctions définies par M. Fuchs au tome 89 de Crelle, vous dites:* «Sind diese Funktionen wirklich eindeutig? Ich verstehe nur dass sie in jedem Wertsystem welches sie erreichen unverzweigt sind». *Voici ma réponse, les fonctions étudiées par M. Fuchs se partagent en trois grandes classes; celles des deux premières son effectivement uniformes; celles de la troisième ne sont en général que* unverzwiegt. *Elles ne sont uniformes que si l'on ajoute une condition à celles énoncées par M. Fuchs. Ces distinctions ne sont pas faites dans le premier travail de M. Fuchs; on le trouve dans deux notes additionnelles, malheureusement trop concises et insérées l'une au* «Journal de Borchardt», *t. 90, l'autre aux* «Göttinger Nachrichten», *1880.*
Je vous remercie beaucoup de votre dernière note que vous avez eu la bonté de m'envoyer. Les résultats que vous énoncez m'intéressent beaucoup, voici pourquoi; je les avais trouvés il y a déjà quelques temps, mais [j'hésitai] les publier parce que je désirais éclaircir un peu la démonstration; c'est pourquoi je désirais connaître la votre quand vous l'aurez éclaircie de votre côté.
J'espère que la lutte, à armes courtoises, d'ailleurs, à laquelle nous venons de nous livrer à propos d'un nom, n'altérera pas nos bonnes relations.
Dans tous les cas, ne vous en voulant nullement pour avoir pris l'offensive, j'espère que vous ne m'en voudrez pas non plus de m'être défendu. Il serait ridicule d'ailleurs, de nous disputer plus longtemps pour un nom, Name ist Schall und Rauch *et après tout ça m'est égal, faites comme vous voudrez, je ferai comme je voudrai de mon côté. Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma considération la plus distinguée.*

Poincaré

31. Se questa interpretazione vi sembra esagerata, pensate che Poincaré avrebbe potuto usare un'espressione sempre offensiva ma meno carica come, per esempio, «Non può esservi stato troppo difficile».
32. Sia Poincaré sia Klein conoscevano senz'altro bene il *Faust* di Goethe. Le parole in questione giungono in risposta alla domanda di Margherita che vuole sapere da Faust che cosa pensa della religione. Dopo alcuni versi evasivi, in cui Faust gira attorno alla questione della natura di Dio e del divino, egli dichiara infine: «*Gefühl ist alles / Name ist Schall und Rauch»,* espressione che in italiano suona «Il sentimento è

tutto / il nome è suono e fumo». Ancora oggi la gente usa spesso la seconda metà della citazione per sminuire l'importanza della semantica, ma Klein avrà pensato subito anche alla prima parte.

33. La nota finale di Klein alla corrispondenza (p. 621 del vol. 3 della raccolta delle sue opere) conferma che questa fu la loro ultima lettera. *«Mit diesem Briefe fand die Korrespondenz seinerzeit ihr Ende. Ich vermochte es nur noch, die Abh. CIII fertigzustellen und mußte mich dann, wegen des Versagens meiner Gesundheit, von der weiteren Mitarbeit an der Theorie der automorphen Funktionen zurückziehen, wie schon oben auf S. 585 und in Bd. 2 dieser Ausgabe, S. 258 ausgeführt wurde. Auf die Übersendung meiner Arbeit habe ich von H. Poincaré keine Antwort mehr erhalten. Auch spätere persönliche Bezugnahme haben die hier berührten Fragen nur wenig geklärt.»*

34. Da F. Klein, *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19 Jahrhundert,* citato in nota 29. Il passo citato si trova a p. 361 dell'edizione inglese di cui alla nota 29: «Il prezzo che dovetti pagare per il mio lavoro fu straordinariamente alto — la mia salute ebbe un completo tracollo. L'anno successivo dovetti prendere lunghi periodi di riposo e rinunciare a ogni attività produttiva. Le cose non andarono bene fino all'autunno del 1884, ma anche in seguito non raggiunsi comunque più il mio precedente livello di produttività. Non mi rimisi più ad approfondire le mie precedenti idee. E successivamente, a Gottinga, mi dedicai a estendere il dominio del mio lavoro e a compiti generali di organizzazione della nostra scienza. Come si porrà comprendere, da allora ho sfiorato solo occasionalmente le funzioni automorfe. Il mio lavoro realmente produttivo nel campo della matematica teorica si è concluso nel 1882. In seguito mi sono limitato a esporre o, se ho fatto qualcosa di nuovo, si è trattato solo di sistemare qualche dettaglio».

35. Si sposò il 20 aprile 1880 con la signorina Poulain d'Andecy, della famiglia di Geoffroy Saint-Hilaire.

36. Fu infatti Maître de conférences; scheda Poincaré, Centre Historique des Archives Nationales, Parigi, AJ/16/6124.

37. Presso gli archivi online curati dall'Università di Nancy (si veda www.univ-nancy2.fr/poincare/index.hrml) è possibile consultare un'utile cronologia della vita di Poincaré. Gli Archivi nazionali riportano le dare dei suoi incarichi. Gli archivi dell'Accademia delle scienze mostrano che Poincaré venne proposto una prima volta nel 1880 e diverse altre volte in seguito. Ma c'erano molte candidature che attendevano da tempo.

10. Gli articoli topologici di Poincaré

1. Ricordiamo che, secondo Riemann, specificare una geometria si riduce a decidere come misurare la lunghezza di un vettore velocità in corrispondenza di un punto di una curva tracciata da un oggetto sul toro. Possiamo stabilire di pensare una curva sul toro come una curva tracciata sul quadrato stabilendo di usare su quest'ultimo la metrica euclidea standard. Non andremo incontro a nessun problema, perché quando facciamo le identificazioni gli angoli si congiungono: in particolare, quattro angoli retti si uniscono attorno a un vertice. Nello specifico, per i lettori in possesso di qualche nozione di calcolo infinitesimale, stiamo stabilendo di definire la lunghezza di un vettore velocità a ogni punto di un oggetto in movimento lungo un cammino sul toro considerando il cammino corrispondente sul quadrato e prendendo la lunghezza euclidea del vettore velocità del corrispondente moto dell'oggetto.

2. Si noti che ci sono anche delle linee rette che hanno una lunghezza finita. Tali linee girano attorno al toro passando un numero fisso di volte in una direzione e un differente numero di volte nell'altra. Ci sono anche delle linee rette di lunghezza infinita: esse continuano a girare attorno al toro passando un numero infinito di volte sia nell'una sia nell'altra direzione, e giungono arbitrariamente vicine a qualunque punto sul toro, una situazione che viene descritta dicendo che la linea è «densa» sul toro.

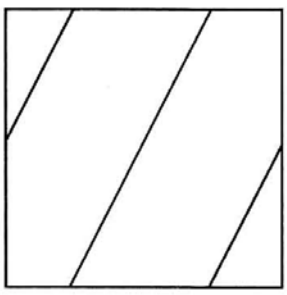


Figura 45: Una linea retta finita tracciata sul toro (i margini opposti sono fra loro connessi).

3. Di fatto, se la geometria è euclidea (ossia, se la somma degli angoli di un triangolo è pari a 180 gradi), la somma degli angoli di un ottagono — regolare o no che sia — dev'essere di 1080 gradi. La ragione è che se prendiamo un vertice dell'ottagono e tracciamo una serie di rette che lo congiungono a ogni altro vertice, veniamo a dividere l'ottagono in 6 triangoli le cui somme angolari equivalgono complessivamente alla somma degli angoli dell'ottagono. Pertanto, l'ottagono ha 6 volte 180 gradi, ossia 1080 gradi. (Ciò ci permette anche di concludere che ogni angolo di un ottagono regolare misura 135 gradi, ossia 1080 gradi diviso 8.)

4. È necessario sapere che un toro a *n* buchi può essere rappresentato come un 4*n*-gono con lati alternativamente identificati in coppie, secondo lo stesso schema seguito per il toro a due buchi e l'ottagono (4x2-gono). Per una buona spiegazione rivolta ai lettori dotati di una preparazione matematica modesta, si veda il capitolo 11 di J. Weeks, *The Shape of Space,* 2ª ed., Marcel Dekker, New York-Basilea 2002. Per trattazioni più precise (e che richiedono competenze specifiche), si vedano J. Stillwell, *Geometry of Surfaces,* Springer-Verlag, New York 1992, o A. Beardon, *The Geometry of the Discrete Groups,* Springer-Verlag, New York 1983.

5. Di fatto, se consideriamo il toro come il cerchio unitario S^1 in E^2 e consideriamo il toro $S^1 \times S^1$ come un sottoinsieme di $E^2 \times E^2$ (che coincide con E^4, dato che una coppia di coppie di numeri reali è una quadrupla di numeri reali, e viceversa), allora questo toro eredita una distanza dalla distanza euclidea in E^4. Se vi piacciono i calcoli, potete dimostrare che il toro con questa distanza è piatto controllando che dei triangoli scelti arbitrariamente abbiano 180 gradi. Tra parentesi, anche i tori appartenenti a dimensioni superiori $S^1 \times \ldots \times S^1$ hanno una metrica naturale piatta, cosa che si può affermare seguendo la medesima linea argomentativa.

6. La dimostrazione del teorema dell'immersione di Riemann si trova in J. Nash, *The Imbedding Problem for Riemannian Manifolds,* «Annals of Mathematics» 63, 1956, pp. 20-63. La biografia citata nel testo è S. Nasar, *A Beautiful Mind,* Simon & Schuster, New York 1998 [trad. it. *Il genio dei numeri. Storia di John Nash, matematico e folle,* Rizzoli, Milano 2000]; il film porta questo medesimo titolo.

7. H. Poincaré, *La Science et l'hypothèse,* Flammarion, Parigi s.d., cap. 4 («L'Espace et la Géométrie»); il testo originale è consultabile on-line, assieme a ulteriori scritti di Poincaré, al sito web www.univ-nancy2.fr/poincare/bhp/ [per una traduzione italiana, si veda H. Poincaré, *La scienza e l'ipotesi,* La Nuova Italia, Firenze 1950].

8. Per un'accurata spiegazione, si veda il saggio introduttivo di D. Goroff a H. Poincaré, *New Methods of Celestial Mechanics,* a cura e con introduzione di D. Goroff, American Institute of Physics, New York 1993.

9. Per una buona spiegazione divulgativa della teoria del caos, si veda J. Gleick, *Chaos: Making a New Science,* Penguin, New York 1988 [trad. it. *Caos: la nascita di una nuova scienza,* BUR, Milano 2005].

10. Questa retrospettiva venne pubblicata postuma in «Acta Mathematica» 38, 1921, e successivamente ristampata nella raccolta di opere di Poincaré di cui alla nota 14 del precedente capitolo *(Œuvres,* vol. 2,p. 183).

11. *Analysis Situs,* «Journal de l'École Polytechnique» 1, 1895, pp. 1-121 (ristampato in *Œuvres,* vol. 6, pp. 193-288). *Analysis Situs* (analisi del luogo) era il nome allora comune, ma ormai desueto, con cui veniva indicata la topologia. Il primo a usarlo era stato Leibniz.

12. Si ipotizzava che i numeri di Betti fossero topologicamente invarianti, ma la mancanza di una dimostrazione avrebbe provocato imbarazzo. L'invarianza dei numeri di Betti sotto omeomorfismo fu dimostrata da James Alexander nel 1913 in dimensione 3 e, pochi anni dopo, venne dimostrata in generale dallo stesso Alexander e dal suo supervisore O. Veblen (che incontreremo entrambi più avanti).

13. H. Poincaré *et al., Œuvres de Henri Poincaré,* Gauthier-Villars, Parigi 1952, vol. 6, p. 258.

14. H. Poincaré, *Complément à l'analysis situs,* «Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo» 13, 1899, pp. 285-343; *Second complément à l'analysis situs,* «Proceedings of the London Mathematical Society» 32, 1900, pp. 277-308; *Sur certaines surfaces algébriques; troisième complément à l'analysis situs,* «Bulletin de la Société Mathématique de France» 30, 1902, pp. 49-70; *Sur le cycles des surfaces algébriques: quatrième complément à l'analysis situs,* «Journal de Mathématiques pures et appliquées» 8, 1902, pp. 169-214 (la rivista del matematico Joseph Liouville); *Cinquième complément à l'analysis situs,* «Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo» 18, 1904, pp. 45-110. Tutti questi articoli, assieme agli annunci di ricerca, sono stati ripubblicati nel vol. 6 delle *Œuvres.*

15. Il terzo complemento studia la particolare classe di superfici algebriche di forma $z^2=F(x,y)$.

16. H. Poincaré, *Second complément à l'analysis situs,* citato in nota 14, 1900, p. 277.

17. *Ibid.,* p. 308.

18. H. Poincaré *et al., Œuvres de Henri Poincaré,* citato in nota 13, p. 435.

19.Poincaré di certo non sapeva che lo spazio che aveva scoperto poteva essere descritto identificando le facce opposte di un dodecaedro. Tale descrizione apparve in C. Weber e H. Seifert, *Die beiden Dodekaedräume,* «Mathematische Zeitschrift» 37, n. 2, 1933, p. 237. Per una descrizione realmente ben fatta e accessibile dei due spazi dodecaedrici di cui si parla in questo articolo, si veda J. Weeks, *The Shape of Space, 2°* ed., Marcel Dekker, New York, 1985. Una seconda edizione dell'opera di Weeks è apparsa nel 2002. Mi sento di raccomandare questo libro senza esitazioni. Può essere letto anche dai non-matematici e, in particolare, dagli studenti delle superiori interessati a questi argomenti. Un altro modo più geometrico di descrivere lo spazio dodecaedrico di Poincaré è quello di considerare lo spazio di tutti i dodecaedri che può essere inscritto in una sfera bidimensionale di raggio 1. In altre parole, possiamo pensare ognuno di questi dodecaedri come un punto. Si tratta di un'operazione analoga a quella che facciamo quando pensiamo il 3-spazio come l'insieme di tutte le triple di numeri reali. Lo spazio di tutti i dodecaedri nella sfera unitaria è tridimensionale, poiché occorrono due parametri per specificare ogni vertice sulla 2-sfera, e un terzo per descrivere la direzione verso cui ci dobbiamo volgere per raggiungere il successivo. In altri termini, specificando tre numeri veniamo a specificare un dodecaedro. Per trovare una curva che non possa essere ridotta a un punto, consideriamo l'insieme dei dodecaedri con un determinato vertice. Ciò corrisponde a passare attraverso tutti gli angoli tra 0 e 120 gradi dal vertice fissato: i dodecaedri ottenuti all'inizio (0 gradi) e alla fine (120 gradi) sono identici. Si vedano anche J. Milnor, *The Poincaré Conjecture One Hundred Years Later* (http://www.math.sunysb.edu/-jack); e *Towards the Poincaré Conjecture and the Classification of Three-Manifolds,* «Notices of the American Mathematical Society» 50, n. 10, 2003, pp. 1226-33. Milnor descrive lo spazio dell'icosaedro regolare inscritto nella sfera bidimensionale.

20. *Œuvres,* citato in nota 13, p. 498.

11. I grandi studiosi

1. Il numero delle candidature al Nobel è tratto da J. Mawhin, *Henri Poincaré. A Life in the Service of Science,* «Notices of the American Mathematical Society» 52, 2005, pp. 1036-44 (è il testo di una conferenza presentata al Simposio Poincaré tenuto a Bruxelles l'8 e il 9 ottobre 2004, in occasione del 150° anniversario della nascita di Poincaré).

2. *La scienza e l'ipotesi* (La Nuova Italia, Firenze 1950) è una traduzione italiana di *La Science et l'hypothèse,* che apparve nel 1902. Un'edizione riveduta e corretta uscì nel 1906 ed è tuttora in commercio. *La valeur de la science* [trad. it. *Il valore della scienza,* La Nuova Italia, Scandicci 1994] apparve nel 1905. Il terzo volume, *Science et Méthode* [trad. it. *Scienza e metodo,* Einaudi, Torino 1997], uscì nel 1908. Una traduzione inglese della trilogia è disponibile sotto il titolo di *The Value of Science: Essential Writings of Henri Poincaré,* Random House, New York 2001. Un libro postumo apparve nel 1913 con il titolo di *Dernières Pensées* (tradotto in inglese come *Mathematics and Science: Last Essays,* Dover Publications, New York 1963).

3. L'Institut de France venne fondato nel 1795 dopo la soppressione — avvenuta due anni prima, durante la Rivoluzione francese — delle società erudite create intorno alla metà del XVII secolo. Esso consiste di cinque sezioni: l'Accademia francese (40 membri, lingua e letteratura, fondata nel 1635 dal cardinal Richelieu), l'Accademia delle belle arti (55 membri, istituita nel 1816 unendo l'Accademia della pittura e della scultura, fondata nel 1648, e l'Accademia della musica, fondata nel 1671), l'Accademia delle iscrizioni e delle belle lettere (55 membri, storia e archeologia, fondata nel 1663), l'Accademia delle scienze (190 membri, medicina, matematica e scienze, fondata nel 1666) e l'Accademia delle scienze morali e politiche (50 membri, fondata nel 1795, soppressa nel 1803, ricostituita nel 1832).

4. H. Poincaré, *La valeur de la science,* Flammarion, Parigi 1905, introduzione; il testo originale può essere consultato, assieme a ulteriori scritti dello stesso Poincaré e di altri autori, al sito web www.ac-nancy-metz.fr/enseign/philo/textesph/default.htm.

5. Dehn divenne un allievo di Hilbert a Gottinga nel 1899. Nel 1900, Hilbert presentò il suo elenco di 23 problemi — che divenne quasi immediatamente famoso — durante una conferenza a Parigi.

6. Possiamo calcolare le aree dei poligoni nel piano dividendoli in un numero finito (per quanto elevato) di triangoli e sommando tutte le loro aeree. Procedendo con attenzione, in questo modo è anche possibile costruire una definizione dell'area delle figure poligonali piane. Il lavoro di Dehn dimostrò che, nel 3-spazio, ogni approccio di questo tipo era invece condannato al fallimento. Anche per gli oggetti poliedrici più semplici, sarebbe necessario ricorrere alla somma dei volumi di un numero infinito di oggetti e, quindi, al calcolo infinitesimale. La dimostrazione di Dehn era estremamente elegante. Egli trovò un invariante di indecomponibilità che gli permise di riformulare il problema come un problema di teoria

elementare dei numeri che era in grado di risolvere. (Per un attento sviluppo dell'invariante di Dehn, si veda J. L. Dupont e C. H. Sah, *Scissors Congruences,* «Journal of Pure and Applied Algebra» 25, 1982, pp. 159-95.) L'invariante di Dehn ha un proprio ruolo nell'odierna teoria delle 3-varietà. Sfruttando il fatto che le 3-varietà possono essere definite identificando le facce di un poliedro, William Thurston ha modificato l'invariante di Dehn al fine di ottenere un invariante geometrico della varietà. Il teorema di rigidità di Mostow implica allora che gli invarianti geometrici sono invarianti topologici.

7. Non è chiaro in che preciso momento Dehn abbia incontrato Heegaard. Si veda J. Stillwell, «Max Dehn», in I, M. James (a cura di), *History of Topology,* Elsevier, Amsterdam 1999, pp. 965-78. Secondo Stillwell (p. 968), i due matematici si conobbero nel 1903 o nel 1904. Il necrologio di Heegaard preparato da K. Johannson afferma che si incontrarono a Kassel nel 1903, ma la vedova di Dehn, Toni, disse a W. Magnus che i due si incontrarono per la prima volta a Heidelberg, al Congresso internazionale dei matematici, nel 1904.

8. M. Dehn e P. Heegaard, «Analysis Situs», in *Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften III,* AB3, Teubner, Lipsia 1907, pp. 153-220. Questo articolo risalente al 1905 conteneva una dimostrazione rigorosa del teorema di classificazione delle superfici compatte che era stato scoperto da August Ferdinand Möbius nel caso delle superfici orientabili e da Walther von Dyck in generale. Una nota a pie di pagina riportata all'inizio afferma che «Heegaard si è occupato della raccolta della letteratura critica usata per l'articolo e della stesura delle sue parti fondamentali. La responsabilità per la forma definitiva dell'articolo è di Dehn».

9. Moritz Epple spiega che Dehn cercò di dimostrare la congettura di Poincaré nel 1908 e pensò di esserci riuscito (Stillwell, p. 969) finché Tietze non lo smentì. Come afferma Klaus Volkert, Dehn andò vicino a diventare «la prima vittima della congettura di Poincaré». [Si veda K. Volkert, «The Early History of Poincaré's conjecture», in J. L. Greffe, G. Heinzmann e K. Lorenz (a cura di), *Henri Poincaré, Science and Pbilosophy,* Akademie Verlag GmbH, Berlino-Albert Blanchard, Parigi 1996, pp. 241-50.]

10. M. Dehn, *Über die Topologie des dreidimensionale Raumes,* «Mathematische Annalen» 69, 1910, pp. 137-68.

11. Più precisamente, Dehn mostra che i gruppi fondamentali delle sfere di omologia si comportano sul piano iperbolico in un modo canonico.

12. Il lemma di Dehn afferma che se una curva chiusa nella 3-sfera fa da bordo a un disco lineare a tratti in modo tale che un anello lungo il bordo è libero di risonare, allora la curva costituisce di fatto il bordo di un disco regolarmente immerso. Sull'argomento si veda C. D. Papakyriakopoulos, *On Dehn's Lemma and the Asphericity of Knots,* «Proceedings of the National Academy of Sciences» 43, 1957, pp. 169-72, e «Annals of Mathematics» 66, 1957, pp. 1-26. Il lemma venne usato per introdurre un nuovo criterio per definire l'essere annodato (ossia, una curva chiusa non è annodata solo se il gruppo fondamentale del suo complemento è abeliano). Il lemma di Dehn ci permette di interpretare le relazioni nel gruppo fondamentale in chiave geometrica nei termini di dischi limitanti i cicli che rappresentano gli elementi.

13. H. Tietze, *Über die topologischen Invarianten mehrdimensional Mannigfaltigkeiten,* «Monatshefte für Mathematik und Physik» 19, 1908, pp. 1-118. Questo scritto ebbe un'importanza cruciale nel diffondere le idee topologiche di Poincaré. Tietze evidenziò l'importanza del gruppo fondamentale nella derivazione degli invarianti delle varietà, e aveva compreso che alcune delle idee di Wirtinger permettevano calcoli con i gruppi fondamentali di complementi nodali. Egli evidenziò un numero di problemi nella definizione di invarianti omologici formulata da Poincaré. Mostrò che era necessario procedere con attenzione con la nozione di equivalenza nodale al fine di evitare i nodi selvaggi. I nodi selvaggi, per esempio, non devono necessariamente limitare un disco nel senso ordinario del Termine. Tietze si chiese, per prima cosa, se i complementi di due nodi potessero essere omeomorfi senza che i nodi stessi fossero isotopici l'uno rispetto all'altro o alla loro immagine speculare (§ 15). Questo problema divenne famoso ed è stato risolto solo di recente. Egli si chiese poi se tutte le sottovarietà del 3-spazio euclideo limitate da un toro fossero complementi nodali. Esaminò i complementi delle unioni di trifogli destrorsi e sinistrorsi, sottolineando che nessuno aveva mai mostrato che i trifogli destrorsi e sinistrorsi non erano equivalenti. In analogia con il metodo di Riemann di studiare le superfici come superfici coprenti la 2-sfera ma ramificate su un numero finito di punti, egli studiò le 3-varietà che coprivano la 3-sfera ma erano ramificate su più collegamenti. Si chiese quindi se tutte le 3-varietà potessero essere ottenute in questo modo (§ 18).

14. J. Hadamard, *L'Oeuvre Mathématique de Poincaré,* «Acta Mathematica» 38, 1921, pp. 203-87. Si trarrà della retrospettiva definitiva sull'opera di Poincaré, scritta dal principale matematico francese degli anni immediatamente successivi alla sua morte. Per una presentazione estremamente affascinante della topologia nella prima metà del XX secolo, si veda C. McA. Gordon, «3-Dimensional Topology up to 1960», in I. M. James (a cura di), *History of Topology,* citato in nota 7, pp. 449-89.

15. Per un valido resoconto del rapporto fra Einstein e Poincaré, si veda P. Galison, *Einstein's Clocks, Poincaré's Maps: Empires of Time,* W. W. Norton, New York 2003 [trad. it. *Gli orologi di Einstein, le mappe di Poincaré: imperi del tempo,* Raffaello Cortina, Milano 2004].
16. H. Poincaré, *La mesure du temps,* «Revue de métaphysique et de morale» 6, pp. 1-13; *Sur la dynamique de l'électron,* «Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo» 21, 1906, pp. 129-75 (annunciato in «Comptes rendus de l'Académie des sciences» 140, 1905, pp. 1504-08).
17. P. Galison, *Einstein's Clocks,* citato in nota 15.
18. John Cole e Henry Fine, due americani che avevano seguito i corsi di Klein a Lipsia, finirono rispettivamente a capo dell'Università del Michigan e di Princeton. Da Gottinga, Haskell andò nell'Università del Michigan e quindi a Berkeley. William Fogg Osgood e Maxime Bôcher furono il nerbo del dipartimento di matematica di Harvard. Due degli allievi tedeschi di Klein a Lipsia, Oskar Bolza e Heinrich Maschke, emigrarono negli Stati Uniti e divennero i pilastri del dipartimento di matematica dell'Università di Chicago. Edward Van Vleck, un altro studente di Klein a Gottinga, ebbe un ruolo centrale nella creazione del dipartimento di matematica dell'Università del Wisconsin.
19. Ogni volta che abbiamo un'espressione invariante sotto trasformazioni, ogni multiplo di quell'espressione è a sua volta invariante. Quindi, ci sono sempre infiniti invarianti per un dato insieme di equazioni e un dato gruppo di trasformazioni. Ma la cosa non finisce qui. La somma e il prodotto di due invarianti è nuovamente un invariante. Pertanto, l'insieme di invarianti risulta chiuso sotto la moltiplicazione per numeri complessi ed è possibile sommare e moltiplicare i suoi elementi. Questa struttura è definita dai matematici un'algebra.
20. I dettagli di questa storia sono noti a tutti i matematici. Per un'accurata presentazione di Hilbert e di questa scoperta, si veda C. Reid, *Hilbert,* Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlino 1970.
21. Hilbert studiò l'insieme di relazioni tra invarianti, che avevano un tipo di struttura algebrica diversa dagli invarianti stessi (anziché la struttura di un'algebra, essi avevano la struttura di un modulo polinomiale). Egli studiò quindi l'insieme di relazioni sulle relazioni, e l'insieme delle relazioni sull'insieme delle relazioni sulle relazioni, e così via. Mostrò infine che questo processo aveva un termine, un risultato noto come «teorema dello syzygy di Hilbert».
22. D. Hilbert, *Die Grundlagen der Geometrie,* Teubner, Lipsia 1899 [trad. it. *Fondamenti della geometria,* Feltrinelli, Milano 1970].
23. H. Poincaré, *Review of Hilbert's "Foundations of Geometry",* «Bulletin of the American Mathematical Society» 10, 1903, pp. 1-23; ripubblicato in D. Saari (a cura di), *The Way It Was: Mathematics from the Early Years of the «Bulletin»,* American Mathematical Society, Providence 2003, pp. 273-96.
24. All'inizio del 1914, Gottinga aveva più di 800 studenti di matematica, oltre un centinaio dei quali seguivano i corsi di livello superiore. Si vedano, in proposito, il libro di C. Reid e gli articoli di D. E. Rowe precedentemente citati.
25. Lettera di Poincaré a Giovanni Battista Guccia (9 dicembre 1911), Archivi del Circolo Matematico di Palermo.

Mon cher ami,
Je vous ai parlé, lors de votre dernière visite, d'un travail qui me retient depuis deux ans. Je ne suis pas plus avancé et je me décide à l'abandonner provisoirement pour lui donner le temps de mûrir. Cela serait bien si j'étais sûr de pouvoir le reprendre; à mon âge je ne puis en répondre [...] Dites moi, je vous prie, ce que vous pensez de cette question et ce que vous me conseillez.

Lettera di Guccia a Poincaré (12 dicembre 1911), collezione privata, Parigi; una scansione della lettera è visualizzabile sul sito web dell'archivio di Poincaré presso l'Università di Nancy, all'indirizzo www.univ-nancy2.fr/,poincare/chp/secc7.html.

Mon cher ami,
Je vous confirme ma dépêche: "Conseil publiez". Quoique inachevé, votre travail ouvrira certainement des voies nouvelles aux autres chercheurs, et la Science en profitera. Au surplus, si vous le croyez nécessaire, vous pourriez ajouter au commencement (sous forme de lettre ou dans une note), que c'est sur les instantes prières de la Direction des "Rendiconti" que vous vous êtes décidé à publier ces recherches inachevées.

L'articolo *Sur un théorème de géometrie* apparve in «Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo» 33, 1912, pp. 375-407, ed è stato ripubblicato nelle citate *Œuvres,* vol. 6, pp. 499-538.

26.La geometria simplettica è un tipo piuttosto particolare di geometria che non si basa su distanze e angoli (ossia, su una metrica), bensì su aree; e la topologia simplettica è lo studio delle varietà che possono portare una struttura simplettica. Questi campi di studio sono diventati estremamente importanti negli ultimi venticinque anni.
27.P. Painlevé scrisse su «Le Temps» che *«Henri Poincaré était vraiment le cerveau vivant des sciences rationnelles»,* una frase in seguito ampiamente citata.
28.H. Poincaré, *L'état actuel et l'avenir de la physique mathématique,* «Bulletin des sciences mathématiques» 28, 1904, pp. 302-24.

12. La congettura diventa famosa

1. Ce ne furono 37 negli anni Ottanta del XIX secolo, 35 negli anni Novanta e infine 31 dal 1900 al 1910 (www.en.wikipedia.org/ wiki/World's_Fair).
2.Purtroppo, però, lo sviluppo di Palermo non aveva radici profonde, ma era piuttosto basato su una bolla economica temporanea gonfiata dalle esportazioni di beni siciliani che costavano poco per via del basso prezzo della manodopera. Le cose erano fuori controllo e la società civile era in crisi. Le autorità civili e politiche, per quanto nominalmente in carica, dovevano rivolgersi alla mafia per sedare le rivolte dei lavoratori. Joseph Petrosino, un funzionario di alto livello della polizia newyorkese che si era recato in Sicilia per rintracciare le radici delle operazioni di estorsione che avevano luogo negli Stati Uniti, venne ucciso a colpi d'arma da fuoco nel 1909, alla luce del sole, sotto la statua di Garibaldi in piazza Marina, nel centro di Palermo.
3.A. Brigaglia, «The Circolo Matematico di Palermo», in K. H. Parshall e A. C. Rice (a cura di), *Mathematics Unbound: The Evolution of an International Mathematical Research Community, 1800-1945,* American Mathematical Society-London Mathematical Society, Providence-Londra 2002, pp. 179-200. Si veda, in particolare, p. 192.
4. Rivolgendosi a un gruppo di studenti in un suo discorso, Poincaré li aveva messi in guardia: «Pensate forse che Guglielmo II condivida le vostre stesse aspirazioni? Credete che userà il suo potere per difendere i vostri ideali? O confidate forse nel popolo, e sperate che la gente si unirà attorno ai vostri medesimi ideali? Questo era ciò che speravamo nel 1869. Non illudetevi che ciò che i tedeschi chiamano diritto o libertà siano le stesse cose che noi indichiamo con questi nomi»; H. Poincaré, «Le Banquet du 11 Mai», Banchetto annuale dell' Associazione generale degli studenti di Parigi, 1903, p. 63 (citato in P. Galison, *Einstein's Clocks, Poincaré's Maps: Empires of Time,* W. W. Norton, New York 2003, p. 213).
5. «Quando scoppiò la Grande guerra, io non la percepii come una somma tragedia, ma come un'interruzione delle più esasperanti per i miei progetti personali.» Sono le parole con cui Vera Brittain apre il suo libro, *Testament of Youth: An Autobiographical Study of the Years 1900-1925,* Penguin, New York 1989 (l[a] ed. Londra 1933).
6. Uno dei più grandi padiglioni alla Fiera mondiale di Chicago fu quello della Krupps.
7. Einstein aveva presentato la propria *Habilitationsschrift* e aveva ottenuto un incarico di basso profilo presso l'Università di Berna nel 1908. Nel 1909 era ormai riconosciuto come un grande pensatore e potè licenziarsi dal suo lavoro all'Ufficio brevetti. Divenne professore ordinario all'Università Karl-Ferdinand di Praga nel 1911 e ritornò in Svizzera nel 1912, avendo ottenuto una cattedra alla famosa Eidgenössische Technische Hochschule di Zurigo. L'offerta che ricevette da Berlino era estremamente generosa: prevedeva un lavoro di ricerca presso l'Accademia prussiana delle scienze, una cattedra — ma senza compiti d'insegnamento — all'Università di Berlino e la direzione del nascente Istituto di fisica Kaiser Wilhelm.
8. La citazione è tratta dal sito web dell'Università di St. Andrews. Einstein presentò tre scritti all'Accademia di Berlino: *Zur allgemeinen Relativitätstheorie* (Sulla relatività generale) il 4 novembre 1915, *Zur allgemeinen Relativitätstheorie (Nachtrag)* (Sulla relatività generale — Aggiunta) l'11 novembre, e *Die Feldgleichungen der Gravitation* (Le equazioni di campo della gravitazione) il 25 novembre. Hilbert, dal canto suo, presentò una nota su *Die Grundlagen der Physik* (I fondamenti della fisica) all'Accademia di Gottinga il 20 novembre 1915. Quello di Hilbert fu il primo scritto a contenere la formula corretta dell'equazione di campo della relatività generale. Il rapporto fra i due uomini era amichevole, e Hilbert ammise tranquillamente che l'idea era di Einstein. La derivazione presentata da Hilbert era molto più lineare.
9. E Heegaard, *Forstudier til en topologisk teori for de algebraiske fladers sammenhæng,* «Der Nordiske Forlag», Copenhagen 1898. La traduzione in francese di Alexander apparve come *Sur l'Analysis situs,*

«Bulletin de la Société Mathématique de France» 44, 1916, pp. 161-242. Per una biografia di Alexander, si veda S. Lefschetz, «James Waddell Alexander (1888-1971)», in *Yearbook oft he American Philosophical Society (1973),* Philadelphia 1974, pp. 110-14.

10. J. W. Alexander, *Note on Two 3-Dimensional Manifolds with the Same Group,* «Transactions of the American Mathematical Society» 20, 1919, pp. 339-42. Tietze aveva dimostrato che due 3-varietà con gruppi fondamentali identici avevano necessariamente gli stessi gruppi di omologia (cosa che risulta certamente falsa nel caso le varietà abbiano dimensione superiore a tre). Le due varietà che avevano gruppi fondamentali identici sono oggi note come gli spazi lenticolari L(5,2) e L(5,l). Per qualunque intero positivo *p* e qualunque intero *q* minore di *p* e maggiore o eguale a 0, definiamo lo spazio lenticolare L*(p,q)* come segue: dividiamo l'equatore della 3-palla in *p* segmenti uguali, e pensiamo gli emisferi superiore e inferiore come due poligoni di *p* lati. Correggiamo questi poligoni impartendo a quello superiore un *q*-esimo di giro in senso antiorario. Tietze aveva notato che *L(p,q)* è coperto dalla 3-sfera *p* volte, e ha quindi un gruppo fondamentale finito con *p* elementi (la *p*-esima potenza di almeno uno dei quali è l'elemento identità). Egli si era chiesto specificamente se L(5,l) e L(5,2), che sono i più semplici esempi che non risultano omeomorfi in modo immediatamente evidente, fossero di fatto omeomorfi. Alexander sembra non essersi accorto che Tietze si era posto esplicitamente questa domanda. Il termine «spazio lenticolare» proviene dall'articolo di W. Threlfall e H. Seifert, *Topologische Untersuchung der Discontinuitätsbereiche endlicher Bewegungsgruppen der dreidimensionalen sphärische Raumes I,* «MathematischeAnnalen» 104, 1930, pp. 1-70, che esamina estensivamente gli spazi di questo tipo. Dopo aver diviso l'equatore della 3-palla in *p* parti, gli autori rappresentano gli emisferi superiore e inferiore come prismi con *p* facce, così che la 3-palla viene ad assomigliare a un gioiello a 2*p* facce.

11. Egli chiarificò il rapporto tra la topologia combinatoria, in cui le 3-varietà sono considerate come identificanti dei poliedri, e la topologia generale, in cui non è necessariamente possibile tagliare le 3-varietà in un numero finito di pezzi con un numero finito di lati. Scoprì, per esempio, la famosa «sfera cornuta» di Alexander, che è omeomorfa a una sfera bidimensionale e vive nella 3-sfera, ma non la suddivide in due regioni le cui chiusure sono omeomorfe a 3-palle. D'altro lato, egli mostrò che una 2-sfera poliedrica divide la 3-sfera in due palle, la chiusura di ognuna delle quali è una 3-palla. Sfruttò un ragionamento simile per mostrare che ogni toro poliedrico nella 3-sfera fa da bordo a un 2-toro solido, un fatto che Dehn aveva assunto senza dimostrazione e che Tietze sottolineando che non si trattava di una cosa ovvia e che c'era bisogno di una prova — aveva posto come congettura.

12. J. W. Alexander, «Some Problems in Topology», *Verhandlungen des Internationalen Mathematiker Kongress Zürich,* 1932 (rist. Kraus 1967), pp. 249-57.

13. Whitehead affermò che ogni 3-varietà aperta che può essere deformata in modo continuo fino a essere ridotta a un punto è omeomorfa a $\mathbf{R}^3$.

14. Il volume di Veblen, apparso nel 1922 (O. Veblen, *Analysis Situs,* American Mathematical Society, New York 1922), discuteva la congettura di Poincaré (cap. 5, § 39, p. 147), ma non era usato come manuale.

15. Per ulteriori notizie sulla vita di Seifert, si veda la breve biografia di Dieter Puppe, «Herbert Seifert: May 27, 1907-October 1, 1996», in I. M. James (a cura di), *History of Topology,* Elsevier, Amsterdam 1999, pp. 1021-27. Il passo del diario di Threlfall che abbiamo citato è ripreso da qui. L'originale tedesco recita: *«Dos Buch ist aus Vorlesungen hervorgegangen, die er eine von uns dem anderen im Jahre 1927 an der Technische Hochschule Dresden gehalten hat. Bald hat aber der Hörer so wesentlich neue Gedanken zur Ausarbeitung beigetragen und sie so von Grund auf umgestaltet, daß eher als sein Name der des ursprünglichen Verfassers auf dem Titelblatte fehlen dürfte». Lehrbuch der Topologie* venne pubblicato nel 1934. Nel 1980 ne è apparsa una traduzione inglese (accompagnata da una traduzione del fondamentale articolo di Seifert sulle varietà fibrate, Academic Press, New York). Le citazioni riguardanti la congettura di Poincaré sono riprese da p. 225 della traduzione inglese.

16. Non è queste la sede per tentare di presentare una storia completa della matematica negli Stati Uniti. Probabilmente, nel XIX secolo il miglior matematico di origine americana fu Willard Josiah Gibbs (1839-1903). Nel 1863, conseguì il primo dottorato in ingegneria offerto da Yale. Per la sua preparazione matematica, però, ebbe un peso cruciale la formazione che ricevette a Parigi, Berlino e Heidelberg, dal 1866 al 1869.

17. Yale fu la prima università a istituire, nel 1847, un programma di specializzazione post-laurea, seguito dai primi tre dottorati (in filosofia e psicologia, in lettere classiche e in fisica) conferiti nel 1861. Harvard, Princeton, l'Università della Pennsylvania e quella del Michigan seguirono il suo esempio poco più di un decennio dopo. La Johns Hopkins University, dedicata esplicitamente alla formazione post-laurea, aprì i battenti nel 1876, portando un reale cambiamento nel panorama universitario americano. Il suo breve successo, però, vacillò quando non fu in grado di assicurarsi Klein per la successione a Sylvester. La

Clark University era un'altra istituzione nata con lo scopo di concentrarsi in particolare sui programmi di specializzazione. Aveva delle caratteristiche realmente promettenti, ma non riuscì mai a farle fruttare appieno a causa della carenza di sovvenzioni. Con l'eccezione di Harvard — che, grazie a Osgood e Bòcher aveva un concreto punto di forza nell'analisi —, negli Stati Uniti non c'erano dipartimenti di matematica che fossero realmente di prim'ordine. Per una presentazione dell'emergere della matematica negli Stati Uniti, si veda K. H. Parshall e D. E. Rowe, *The Emergence of the American Mathematical Community 1876-1900: J. J. Sylvester, Felix Klein, and E. H. Moore,* American Mathematical Society-London Mathematical Society, Providence-London 1994. In particolare, il capitolo 6 illustra in modo dettagliato, con abbondanti riferimenti d'archivio, il panorama matematico dell'epoca e la fondazione dell'Università di Chicago.

18. Osgood conseguì il dottorato a Erlangen e Bôcher a Gottinga.

19. Quattro degli allievi di Moore - L. E. Dickson (1874-1954), O. Veblen (1880-1960), R. L. Moore (1882-1974) e G. D. Birkhoff (1884-1944) - emersero sopra tutti gli altri per il loro impareggiabile acume, e il loro impatto sulla matematica americana fu quasi incalcolabile. Erano tutti e quattro grandissimi matematici e abili amministratori, e ciascuno di loro era un ottimo insegnante universitario. Birkhoff condusse il dipartimento di matematica di Harvard all'eccellenza; Veblen fece lo stesso a Princeton; R. L. Moore, all'Università del Texas di Austin; e Dickson portò avanti la tradizione dell'Università di Chicago.

20. O. Veblen, *Theory on plane curves in non-metrical analysis situs,* «Transactions of the American Mathematical Society» 6, 1905, pp. 83-98.

21. Si veda L. B. Feffer, *Oswald Veblen and the Capitalization of American Mathematics: Raising Money for Research, 1923-1928,* «Isis» 89, 1998, pp. 474-97.

22. Si veda, per esempio, G. D. Birkhoff, *Fifty Years of American Mathematics,* «Science» 88, n. 2290, 1938, pp. 461-67 (in particolare, p. 465).

23. Si trattava di James Alexander (1888-1971, allievo di Veblen), Marston Morse (1892-1977, allievo di Birkhoff), Hassler Whitney (1907-89), Solomon Lefschetz (1884-1972, allievo di William Story, che era stato uno studente di Klein) e Norman Steenrod (1910-71, allievo di Lefschetz).

24. Per farsi un'idea del carattere esuberante di Lefschetz, anche da vecchio, si veda il suo saggio *Reminiscences of a Mathematical Immigrant in the United States,* «American Mathematical Monthly» *77,* 1970, pp. 344-50, scritto due anni prima della sua morte.

25. Nel suo primo complemento, Poincaré introdusse le celle duali e una cella complessa «reciproca», assieme a un'operazione congiunta su simplessi che lui affermava essere sensata. È difficile cogliere il senso di queste argomentazioni senza introdurre la coomologia.

26. Citato in C. Reid, *Hilbert,* Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlino 1970, p. 205.

13. Dimensioni superiori

1. Milnor dimostrò che la curvatura totale di un nodo che non era equivalente al cerchio non annodato era maggiore di 4π. Il risultato venne pubblicato negli Annali di matematica di Princeton: J. Milnor, *On the Total Curvature of Knots,* «Annals of Mathematics» 52, 1950, pp. 248-57.

2. Due strutture differenziabili su varietà omeomorfe sono equivalenti se c'è un omeomorfismo tra le varietà che è differenziabile in entrambe le direzioni (ossia, che è tale che esso, e il suo inverso, hanno derivate ben definite a ogni punto).

3. J. Milnor, *On Manifolds Homeomorphic to the 7-Sphere,* «Annals of Mathematics» 64, 1956, pp. 399-405.

4. Per esempio, Milnor mostra che le varietà che sta considerando sono sfere producendo una funzione su di esse che ha solo due «punti critici» — ossia, due punti dove la rapidità di variazione è 0 in tutte le direzioni. Si sapeva da molto tempo che ogni funzione continua su un insieme limitato ha un massimo e un minimo. Se, in aggiunta, la funzione è differenziabile, allora al massimo e al minimo devono trovarsi i punti critici della funzione: punti in corrispondenza dei quali la rapidità di variazione della funzione è 0 in tutte le direzioni. L'aspetto più profondo e meno scontato di questo ragionamento è che se abbiamo una funzione su una varietà compatta che ha derivate ovunque e se essa ha solo due punti critici, allora la varietà dev'essere una sfera. Il fatto sembrava essere una mera curiosità. Nelle mani di Milnor, esso divenne uno strumento essenziale.

5. M. Kervaire, *A manifold which does not admit any differentiable structure,* «Commentarli Mathematici Helvetici» 34, 1960, pp. 257-70. L'esempio portato da Kervaire è omeomorfo a una sfera 9-dimensionale.

6. Un punto critico di una funzione è un punto dove tutte le sue derivate sono eguali a 0.

7. J. Milnor, *Singular Points of Complex Hypersurfaces,* Princeton University Press, Princeton 1968.
8. R. Thom, *Mathematical Models of Morphogenesis,* trad. ingl. di W. M. Brookes, Halsted Press, New York 1983 [trad. it. *Modelli matematici della morfogenesi,* Einaudi, Torino 1985].
9. C'era, per esempio, una versione aggiornata dell'approccio di Max Dehn in cui si poteva prendere in considerazione un cubo con un buco annodato.
   Il suo esterno nella 3-sfera è un toro solido. Forse era possibile riattaccare il toro in un modo differente così da ottenere una varietà tridimensionale che risultasse semplicemente connessa, ma non una 3-sfera. Si poteva di fatto scrivere per esteso una presentazione del gruppo fondamentale, e quindi provare a mostrare che tutti gli elementi si annullavano e rimaneva solo l'elemento unità. L'algebra richiesta era terribilmente complicata, ma si trattava di quel genere di algebra che ricompensava l'ingegnosità e in cui si poteva aver fortuna. Una volta annullati tutti gli elementi, forse era possibile mostrare in qualche modo che la varietà non era omeomorfa alla 3-sfera: forse ogni funzione su di essa aveva necessariamente più di due punti critici. Questo è uno di quei problemi in grado di toglierti il sonno e di farti saltare i pasti.

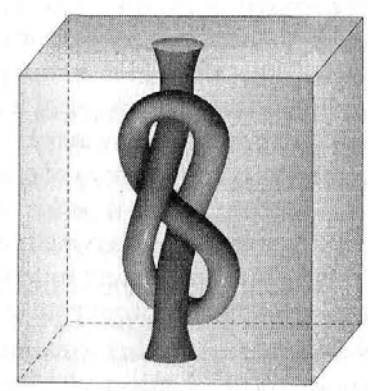


Figura 46: Un cubo con un buco annodato.

10. La sua tesi venne premiata, su raccomandazione di Constantine Caratheodory, perché conteneva un'ulteriore prova dell'invarianza dei gruppi di analogia dei complessi simpliciali, un risultato dimostrato per la prima volta da Alexander.
11. Dehn arrivò negli Stati Uniti nel 1940, ma gli fu difficile assicurarsi un posto fisso come docente universitario. Insegnò all'Università dell'Idaho, all'Illinois Institute of Technology e al St. John's College, per approdare infine al Black Mountain College (un istituto sperimentale fra le montagne del North Carolina, famoso soprattutto per le arti). Docente amato da tutti, morì nel 1952, quattro anni prima che l'istituto chiudesse i battenti.
12. C. D. Papakyriakopoulos, *On Solid Tori,* «Proceedings of the London Mathematical Society» 3, ser. 7, 1957, pp. 281-99. (Sia M una varietà tridimensionale con bordo non-vuoto ∂M, e si supponga che $f:S^1 \to \partial M$ sia un ciclo chiuso (possibilmente con autointersezioni) che è omotopicamente 0 in M ma non ∂M; allora, esiste un ciclo semplice (senza autointersezioni) $F:S^1 \to \partial M$ con la medesima proprietà.) Papa dimostrò questo risultato sotto un'assunzione di orientabilità che venne in seguito rimossa da John Stallings, allora studente specializzando a Princeton, in J. R. Stallings, *On the Loop Theorem,* «Annals of Mathematics» 72, 1960, pp. 12-19. Il lemma di Dehn parte da quella configurazione la cui fattibilità ci viene garantita dal teorema del cappio. Nella fattispecie, sia M una varietà tridimensionale con bordo non-vuoto ∂M, e si supponga che $f:S^1 \to \partial M$ sia un ciclo chiuso semplice (senza autointersezioni) che è omotopicamente 0 in M. Ne segue che c'è un'includente $F:D^2 \to \partial M$ che estende f. La dimostrazione apparve in C. D. Papakyriakopoulos, *On Dehn's Lemma and the Asphericity of Knots,* «Annals of Mathematics» 66, 1957, pp. 1-26. L'espressione «asfericità dei nodi» si riferisce al teorema della sfera dimostrato da Papa in questo stesso articolo. Sia M una varietà tridimensionale orientabile chiusa (quindi, niente bordo), e si supponga che il secondo gruppo di omotopia π_2M non sia triviale. Esiste allora un'includente $S^2 \to \partial M$ che è omotopicamente non-0. La dimostrazione di Papa richiedeva alcune assunzioni extra che sarebbero poi state rimosse da Henry Whitehead (J. H. C. Whitehead, *On the Sphere in 3-Manifolds,* «Bulletin of the American Mathematical Society» 64, 1958, pp. 161-66). Per una presentazione ben fatta di questo lavoro, si veda anche C. D. Papakyriakopoulos, *Some Problems on 3-Dimensional Manifolds,* «Bulletin of the American Mathematical Society» 64, 1958, pp. 317-35-13.
13. R. H. Bing, *Necessary and Sufficient Conditions that a 3-Manifold Be S^3,* «Annals of Mathematics» 68, 1958, pp. 17-37. K. Koseki, *Poincarésche Vermutung in Topologie,* «Mathematical Journal of Okayama University» 8, 1958, pp. 1-106.

14. C. D. Papakyriakopoulos, *A Reduction of the Poincaré Conjecture to group theoretic conjectures,* «Annals of Mathematics» 77, 1963, pp. 250-305.
15. A. Doxiadis, *Uncle Petros and Goldbach's Conjecture,* Bloomsbury, Londra 2000 [trad. it. *Zio Petros e la congettura di Goldbach,* Bompiani, Milano 2004].
16. R. H. Fox, «Construction of Simply Connected 3-Manifolds», in M. K. Fort (a cura di), *Topology of 3-Manifolds and Related Topics,* Prentice Hall, Englewood Cliffs (NJ) 1962, pp. 213-16. R. H. Bing, «Some Aspects of the Topology of 3-Manifolds Related to the Poincaré Conjecture», in Saaty, T. L. (a cura di), *Lectures on Modern Mathematics II,* Wiley, New York 1964, pp. 93-128.
17. J. R. Stallings, «How not to Prove the Poincaré Conjecture», in *Topology Seminar, Wisconsin 1965,* «Annals of Mathematical Studies» 60, 1966, pp. 83-88. Disponibile anche sul sito web math.berkeley.edu/~stall.
18. Se abbiamo due varietà M e N, il prodotto di M e N (indicato con M x N) è dato dall'insieme di coppie (*a, b)* di elementi, dove *a* è in M e *b* è in N. M x N è una varietà. É facile mostrare che il prodotto della sfera bidimensionale e del cerchio sarà piatto in una direzione e curvo in altre due. La massima parte delle geometrie addizionali di Thurston vivevano su prodotti o spazi che sarebbero dei prodotti se potessimo rimuovere una superficie dalla varietà.
19. Si può mostrare che ogni varietà tridimensionale semplicemente connessa con geometria sferica è omeomorfa alla 3-sfera. Ciò non è difficile (si vedano, per esempio, i libri di Thurston o di Weeks).
20. W. P. Thurston, *Three-Dimensional Geometry and Topology,* vol. 1, a cura di S. Levy, Princeton University Press, Princeton 1997. La raccolta di appunti delle lezioni tenute dall'autore a Princeton (W. P. Thurston, *The Geometry and Topology of Three-Manifolds)* è consultabile sul sito web del Mathematical Sciences Reserch Institute di Berkeley, www.msri.org/publications/books/gt3m. Sia il libro sia gli appunti sono magnifici.
21. W. P. Thurston, *Mathematical Education,* «Notices of the American Mathematical Society» 37, 1990, pp. 844-50.
22. Si vedano A. Jaffe e E Quinn, *Theoretical Mathematics: Towards a Cultural Synthesis of Mathematics and Theoretical Physics,* «Bulletin of the American Mathematical Society» 29, 1993, pp. 1-13; e W. P. Thurston, *On Proof and Progress in Mathematics,* «Bulletin of the American Mathematical Society» 30, 1994, pp. 161-77.
23. Ci sono molti modi differenti per implementare questa prescrizione come un insieme di equazioni. Hamilton considerò il tensore di curvatura di Ricci, che è uno strumento che otteniamo facendo la media fra determinate parti del tensore di curvatura di Riemann. Pertanto, dato che possiamo calcolare il tensore riemanniano dalla prima e dalla seconda derivata del tensore metrico g_{ij}, possiamo calcolare il tensore di Ricci dallo stesso. Il flusso di Ricci è dato da $dg_{ij}/dt = -2R_{ij}$.
24. Il tensore di Ricci può anche essere definito direttamente. Ciò è possibile dal momento che possiamo derivare il tensore di curvatura di Riemann in termini di prima e seconda derivata del tensore metrico.
25. R. S. Hamilton, *Three-Manifolds with Positive Ricci Curvature,* «Journal of Differential Geometry» 17, 1982, pp. 255-306.
26. D. M. DeTurck, *Deforming Metrics in the Direction of Their Ricci Tensors,* «Journal of Differential Geometry» 18, 1983, pp. 157-62. Per una bella raccolta di articoli sul flusso di Ricci, si veda H.-D. Cao, B. Chow, S. C. Chu e S.-T. Yau (a cura di), *Collected Papers on the Ricci Flow,* International Press, Somerville 2003. In questo volume viene anche presentata una versione migliorata dell'articolo di DeTurck.
27. Il caso critico apparve in M. Gage e R. S. Hamilton, *The Heat Equation Shrinking Convex Piane Curves,* «Journal of Differential Geometry» 23, 1986, pp. 69-96. In M. Grayson, *The Heat Equation Shrinks Embedded Curves to Round Points,* «Journal of Differential Geometry» 26, 1987, pp. 285-314, l'autore dimostra che il flusso in questione rende convessa ogni curva chiusa (inclusa), al che subentra il risultato di Gage-Hamilton.
28. Questo risultato venne dimostrato per tutti i casi tranne che per le 2-sfere — nelle quali la curvatura, in corrispondenza di un qualche punto, è pari a 0 — in R. S. Hamilton, *The Ricci Flow on Surfaces,* «Contemporary Mathematics» 71, 1988, pp. 237-61. Il caso escluso è stato poi dimostrato da B. Chow, *The Ricci Flow on the 2-Sphere,* «Journal of Differential Geometry» 33, 1991, pp. 325-34.
29. J. Birman, *Poincaré} Conjecture and the Homotopy Group of a Closed, Orientable 2-Manifold,* «Journal of the Australian Mathematical Society» 17, 1974, pp. 214-21.

14. Una soluzione nel nuovo millennio

1. Le circostanze che hanno fatto da sfondo alla scelta dei problemi sono brevemente raccontate in un articolo (che abbiamo già citato nella nota 3 al capitolo 1) scritto da Arthur Jaffe, fondatore e direttore del Clay Institute. L'articolo si intitola *The Millennium Grand Challenge in Mathematics* ed è stato pubblicato in «Notices of the American Mathematical Society» 53, n. 6, 2006, pp. 652-60.
2. Dal video *The CMI Millennium Meeting Collection: Lectures by M. Atiyah, T. Gowers and J. Tate* (diretto da F. Tisseyre), Springer-Verlag, New York 2002.
3. Königsberg diede i natali anche a Immanuel Kant. Oggi chiamata Kaliningrad, venne ripopolata con cittadini russi al termine della Seconda guerra mondiale. Negli anni Cinquanta venne chiusa ai visitatori stranieri. In seguito al crollo dell'Unione Sovietica e all'ammissione di Polonia e Lituania nell'Unione Europea nel 2004, Kaliningrad è stata completamente circondata dalla UE. Ci sono in corso delle discussioni su un eventuale cambiamento del nome della città.
4. Due problemi vennero elencati da tutti i matematici intervistati: la congettura di Poincaré e l'ipotesi di Riemann. (Si veda l'articolo di Jaffe di cui alla nota 1.)
5. G. Perelman, *The Entropy Formula for the Ricci Flow and Its Geometric Applications,* math.DG/0211159, 11 novembre 2002; *Ricci Flow with Surgery on Three-Manifolds,* math.DG/0303109, 10 marzo 2003; *Finite Extinction Time for the Solutions to the Ricci Flow on Certain Three-Manifolds,* math. DG/0307245, 17 luglio 2003.
6. G. Perelman, *The Entropy Formula,* p. 2, citato nella nota precedente.
7. *Ibid.,* p. 3.
8. *Ibid.*
9. *Ibid.*
10. *Ibid,* p.4.
11. Scuola superiore #239 di Leningrado.
12. Gli altri due furono il tedesco Bruno Haible e il vietnamita Le Tu Quôc Thang.
13. È necessario che la varietà sia non-compatta e completa. Quest'ultimo termine significa che tutti i bordi (o punti mancanti) sono infinitamente lontani.
14. G. Perelman, *Proof of the Soul Conjecture of Cheeger and Gromoll,* «Journal of Differential Geometry» 40, 1994, pp. 299-305.
15. L'Istituto Steklov — la divisione matematica dell'Accademia russa delle scienze — venne spostato a Mosca nel 1940. Il dipartimento di San Pietroburgo occupa la sede originaria dell'istituzione, e c'è un'amichevole — e talvolta acuta — rivalità fra la sezione di Mosca e quella di San Pietroburgo.
16. L'episodio è raccontato dettagliatamente nel libro del suo amico Alexander Solženitcyn, *Arcipelago Gulag,* Mondadori, Milano 2001. La Ladyzhenskaya era anche molto amica della poetessa Anna Achmatova. Per un toccante ricordo personale (e matematico) della donna, con molte fotografie, si veda S. Friedlander, P. Lax, C. Morawetz, L. Nirenberg, G. Seregin, N. Ural'tseva e M. Vishik, *Olga Alexandrovna Ladyzhenskaya (1922-2004),* «Notices of the American Mathematical Society» 51, n. 11, 2004, pp. 1320-31. Olga Ladyzhenskaya ha portato decisivi contributi alla nostra comprensione delle equazioni di Navier-Stokes, le equazioni che governano il flusso dei fluidi e che, quindi, rivestono un'importanza critica ai fini delle previsioni del tempo (la nostra atmosfera è un fluido). Queste equazioni sono il soggetto di un altro dei problemi del millennio elencati dal Clay Institute.
17. Lo scambio di e-mail venne inoltrato a Don Davis, dell'Università di Lehigh, con la richiesta di mandarlo al gruppo di discussione sulla topologia algebrica moderato dallo stesso Davis.
18. In realtà, ciò che dimostra è un'altra congettura di Thurston, la «congettura dell'ellisse», che afferma che ogni 3-varietà con gruppo fondamentale finito ha una metrica con curvatura costante positiva. Questa congettura è meno generale di quella di geometrizzazione, ma più generale della congettura di Poincaré, che da essa segue immediatamente.
19. Si tratta del sito internet www.math.lsa.umich.edu/research/ricci-flow/perelman.html.
20. Questi scritti sono stati presentati per la pubblicazione e sono stati inviati a www.arXiv.org. Si veda B. Kleiner e J. Lott, *Notes on Perelman's Papers,* arXiv:math.DG/0605667vl, 25 maggio 2006 (192 pagine).
21. All'epoca, però, Tian aveva un incarico al Mit.
22. Il libro è stato presentato per la pubblicazione e, nel frattempo, il testo è stato inviato a www.arXiv.org. Si veda J. W Morgan e G. Tian, *Ricci Flow and the Poincaré Conjecture,* math.DG/0607607, 25 luglio 2006 (473 pagine).
23. G. Besson, *Une nouvelle approche de l'étude de la topologie des variétés de dimension 3 d'après R.*

Hamilton et G Perelman, «Sémi-nane Bourbaki», 57, n. 947, 2004-05, giugno 2005.

24. Entrambi sono allievi di Shing-Tung Yau, il matematico di Harvard che abbiamo menzionato in precedenza e che ricevette la medaglia Fields nel 1983 per il modo in cui si servì di equazioni alle derivate parziali per stabilire l'esistenza di metriche su diverse varietà. Yau è uno dei matematici più influenti dei nostri giorni ed è un maestro nell'arte di estrapolare conclusioni geometriche da equazioni alle derivate parziali. Xi-Ping Zhu viene dall'Università Zhongshan di Guangzhou, nella Cina continentale, e Cao dalla Lehigh University. Yau e Cao continuano a organizzare seminari sul flusso di Ricci (si veda, per esempio, www.math.harvard.edu/ricci/ricci.pdf).
25. H.-D. Cao, X.-P. Zhu, *A Complete Proof of the Poincaré and Geometrization Conjectures — Application of the Hamilton-Perelman Theory of the Ricci Flow,* «Asian Journal of Mathematics» 10, n. 2, giugno 2006, pp. 165-492.
26. Brian Conrey, direttore dell'Istituto americano di matematica, e David Eisenbud, direttore dell'Istituto di ricerca di scienze matematiche di Berkeley, tennero dei seminari sul lavoro di Perelman. In Europa, Jean-Pierre Bourguignon (direttore dell'Istituto di alti studi scientifici, in Francia) e Gerhard Huisken (dell'Istituto Albert Einstein per la fisica della gravitazione, della Società Max Planck, in Germania) organizzarono dei gruppi di studio.
27. M. T. Anderson, *Geometrization of 3-Manifolds via the Ricci Flow,* «Notices of the American Mathematical Society» 51, n. 2, 2004, pp. 184-93. L. Bessières, *Conjecture de Poincaré: La Preuve de **R**. Hamilton et G. Perelman,* «Gazette des Mathématiciens» 106, 2005, pp. 7-35. J. W. Morgan, *Recent Progress on the Poincaré Conjecture and the Classification of 3-Manifolds,* «Bulletin of the American Mathematical Society» 42, 2005, pp. 57-78.
28. Questa conclusione emerge combinando le osservazioni provenienti da tre diverse fonti: la radiazione cosmica di fondo a microonde, le osservazioni sulle supernovae di tipo 1a e le stime sulla massa dell'universo.
29. l Centro internazionale di fisica teorica «Abdus Salam» di Trieste organizza ogni anno a Trieste un certo numero di incontri di alto livello dedicati ad argomenti specialistici di matematica e fisica teorica. Nel giugno 2005, i partecipanti alla Scuola estiva e al Convegno su geometria e topologia delle 3-varietà approvarono per acclamazione la dimostrazione. (Si veda Aa. Vv. *Shapes, Spaces, and Spheres,* «News from ICTP», estate 2005.) Inutile dire che una votazione di questo tipo è qualcosa di molto diverso da un attento scrutinio individuale.
30. Si veda la notizia riportata su «China View» il 4 giugno 2006 (news.xinhuanet.com/english/2006-06/04/content_46-44754.htm).

15. Madrid, agosto 2006

1. Il primissimo comunicato stampa ufficiale per il congresso, rilasciato in aprile (20 settimane piene prima dell'apertura), annunciava che la congettura di Poincaré sarebbe stata il tema del congresso. Nello stesso avviso, il presidente spagnolo del comitato esecutivo, Manuel De Leon, ipotizzò in un'intervista che la soluzione di Perelman sarebbe stata accettata ufficialmente durante il congresso. I comunicati stampa successivi sarebbero ritornati su questo stesso tema.
2. S. Nasar e D. Gruber, *Manifold Destiny: A Legendary Problem and the Battle over Who Solved It,* «The New Yorker», 28 agosto 2006, pp. 44-58.
3. In seguito, Ball dichiarò alla stampa che avrebbe lasciato agli altri l'interpretazione delle sue parole, e che loro stessi etano liberi di avanzare una loro interpretazione.
4. Le altre medaglie andarono al matematico di Princeton Andrei Okounkov (nato in Russia), all'australiano Terence Tao (dell'Università della California a Los Angeles) e al matematico francese (nato in Germania) Wendelin Werner, dell'Università di Parigi-Sud e dell'École Normale Supérieure.
5. «Se ho visto più lontano, è perché stavo in piedi sulle spalle di giganti»; l'affermazione è attribuita a Isaac Newton (si veda, per esempio, *The Columbia World of Quotations,* Columbia University Press 1996).
6. Ci furono un po' di cavilli sulla valutazione critica dell'articolo di Cao-Zhu. Nessuno dubita della correttezza dei loro risultati. Tuttavia, l'articolo del «New Yorker» aveva sollevato alcune preoccupazioni su chi lo aveva di fatto esaminato.

Bibliografia

AA-VV., *Shapes, Spaces, and Spheres,* «New from ICTP», estate 2005.

ABBOTT, E. A., *Flatland: A Romance of Many Dimensions,* introduzione e note di T. Banchoff, Princeton University Press, Princeton 1991 (trad. it. *Flatlandia. Racconto fantastico a più dimensioni,* Adelphi, Milano 2004).

—, *The Annotated Flatland: A Romance of Many Dimensions,* Perseus, Cambridge (MA) 2002.

ABDALI, S. K., *The Correct Qibla,* www.patriot.net/users/abdali/ftp/ qibla.pdf.

ADAMS, C., *The Knot Book,* The American Mathematical Society, Providence 2004.

ALEXANDER, J. W., *Note on Two 3-Dimensional Manifolds with the Same Group,* «Transactions of the American Mathematical Society» 20, 1919, pp. 339-42.

—, «Some Problems in Topology», in *Verhandlungen des Internationalen Mathematiker Kongress Zürich,* 1932 (rist. Kraus 1967), pp. 249-57.

ALEXANDROV P. — HOPF H., *Topologie,* Springer-Verlag, Berlino 1935. ANDERSON, M. T., *Geometrization of 3-Manifolds via the Ricci Flow),* «Notices of the American Mathematical Society» 51, n. 2, 2004, pp. 184-193.

ARNOLD, V.I., *On Teaching Mathematics,* «Russian Mathematical Surveys» 53, n. 1, 1998, pp. 229-36.

ATIYAH, M. *et al., Responses* to Theoretical Mathematics: Toward a Cultural Synthesis of Mathematics and Theoretical Physics *by A. Jaffe and F. Quinn,* «Bulletin of the American Mathematical Society» 30, 1994, pp. 178-207.

BARDEN, D. — THOMAS, C. *An Introduction to Differential Manifolds,* Imperial College Press, Londra 2003.

BEARDON, A., *The Geometry of the Discrete Groups,* Springer-Verlag, New York 1983. BELL, E. T., *Men of Mathematics,* Simon & Schuster, New York 1937 (trad. it. *I grandi matematici,* Sansoni, Milano 1997).

BERGER, M., *A Panoramic View of Riemannian Geometry,* Springer-Verlag, Berlino 2003.

BESSIERES, L., *Conjecture de Poincaré: La Preuve de R. Hamilton et G. Perelman,* «Gazette des Mathématiciens» 106, 2005, pp. 7-35.

BESSON, G., *Une nouvelle approche de l'étude de la topologie des variétés de dimension 3 d'aprés R. Hamilton et G. Perelman,* «Séminaire Bourbaki» 57, n. 947, 2004-05, giugno 2005.

BING, R. H., *Necessary and Sufficient Conditions that a 3-Manifold Be S^3,* «Annals of Mathematics» 68, 1958, pp. 17-37.

—, «Some Aspects of the Topology of 3-Manifolds Related to the Poincaré Conjecture», in SAATY, T. L. (a cura di), *Lectures on Modern Mathematics II,* Wiley, New York 1964, pp. 93-128.

BIRKHOFF, G. D., *Fifty Years of American Mathematics,* «Science» 88, n. 2290, 1938, pp. 461-67.

—, *Topology,* «Science» 96, n. 2504, 1942, pp. 581-84.

BIRMAN, J., *Poincaré's Conjecture and the Homotopy Group of a Closed, Orientable 2-Manifold,* «Journal of the Australian Mathematical Society» 17, 1974, pp. 214-21.

BOLYAI, F., *Tentamen, s.l.,* 1831.

BONOLA, R., *La geometria non-euclidea. Esposizione storico-critica del suo sviluppo,* Zanichelli, Bologna 1906.

BOTTAZZINI, U., *Henri Poincaré: Philosophe et mathématicien,* Pour la Science, Parigi 2000.

BRITTAIN, V., *Testament of Youth: An Autobiographical Study of the Years 1900-1925,* Penguin, New York 1989 (l[a] ed. Londra 1933).

BROWDER, F. E., *The Mathematical Heritage of Henri Poincaré,* 2 voll, American Mathematical Society, Providence 1983.

BÜHLER, W. K., *Gauss: A Biographical Study,* Springer-Verlag, Berlino-New York 1981.

CALLAHAN, J. J., *The Curvature of Space in a Finite Universe,* «Scientific Americans 235, agosto 1976, pp. 90-100.

CANNON, J. W. — FLOYD, W. J. — KENYON, R. — PARRY, W. R., «Hyperbolic Geometry», in LEVY, S. (a cura di), *Flavors of Geometry,* Cambridge University Press, Cambridge 1997.
CAO, H.—D. — CHOW, B. — CHU, S. C. — YAU, S. T. (a cura di), *Collected Papers on the Ricci Flow,* International Press, Somerville 2003.
CAO, H.—D. — ZHU, X.— P., *A Complete Proof of the Poincaré and Geometrization Conjectures — Application of the Hamilton-Perelman Theory of the Ricci Flow,* «Asian Journal of Mathematics» 10, n. 2, giugno 2006, pp. 165-492.
CHOW, B., *The Ricci Flow on the 2-Sphere,* «Journal of Differential Geometry» 33, 1991, pp. 325-34.
CLIFFORD, W. K., *Mathematical Papers,* a cura di R. Tucker, Macmillan, Londra 1882.
COLLINS, J., *Good to Great: Why Some Companies Make the Leap... and Others Don't,* Harper Collins, New York 2001.
DARBOUX, G., «Eloge Historique d'Henri Poincaré», in POINCARÉ, H., *et al., Œuvres de Henri Poincaré,* vol. 2, Gauthier-Villars, Parigi 1952.
DEHN, M., *Papers on Group Theory and Topology,* trad, e intr. di J. Stillwell, Springer-Verlag, New York 1987.
—, Ü*ber die Topologie des dreidimensionale Raumes,* «Mathematische Annalen» 69, 1910, pp. 137-68.
DEHN, M. — HEEGAARD, P., «Analysis Situs», in *Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften III,* AB3, Teubner, Lipsia 1907, pp. 153-220.
DERBYSHIRE, J., *Prime Obsession: Bernhard Riemann and the Greatest Unsolved Problem in Mathematics,* Joseph Henry Press, Washington 2001 (trad. it. *L'ossessione dei numeri primi. Bernhard Riemann e il principale problema irrisolto della matematica,* Bollati Boringhieri, Torino 2006).
DETURCK, D. M., *Deforming Metrics in the Direction of Their Ricci Tensors,* «Journal of Differential Geometry» 18, 1983, pp. 157-62.
DOXIADIS, A., *Uncle Petros and Goldbach's Conjecture,* Bloomsbury, Londra 2000 (trad. it. *Zio Petros e la congettura di Goldbach,* Bompiani, Milano 2004).
DUPONT, J. L. — SAH, C. H., *Scissors Congruences,* «Journal of Pure and Applied Algebra» 25, 1982, pp. 159-95.
DU SAUTOY, M., *The Music of the Primes: Searching to Solve the Greatest Mystery in Mathematics,* Harper Collins, New York 2003 (trad. it. *L'enigma dei numeri primi,* Rizzoli, Milano 2005).
DUREN, P., *A Century of Mathematics in America,* 3 voll., American Mathematical Society, Providence 1989.
DURFEE, A. H., «Singularities», in JAMES, I. M. (a cura di), *History of Topology,* Elsevier, Amsterdam 1999, pp. 417-34.
EWALD, W. B., F*rom Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics,* Oxford University Press, New York 1996, vol. 1, p. 154.
EPPLE, M., «Geometric Aspects in the Development of Knot Theory», in JAMES, I. M. (a cura di), *History of Topology,* Elsevier, Amsterdam 1999, pp. 301-58.
FEFFER, L. B., *Oswald Veblen and the Capitalization of American Mathematics: Raising Money for Research, 1923-1928,* «Isis» 89, 1998, pp. 474-97.
FOX, R. H., «Construction of Simply Connected 3-Manifolds», in FORT, M. K. (a cura di), *Topology of 3-Manifolds and Related Topics,* Prentice Hall, Englewood Cliffs (NJ) 1962, pp. 213-16.
FREEDMAN, M., *The topology of Four Manifolds,* «Journal of Differential Geometry» 17, 1982, pp. 357-454.
FRIEDLANDER, S. — LAX, P. — MORAWETZ, C. — NIRENBERG, L. — SEREGIN, G. — URAL'TSEVA, N. — VISHIK, M., *Olga Alexandrovna Ladyzhenskaya (1922-2004),* «Notices of the American Mathematical Society» 51, n. 11, 2004, pp. 1320-31.
GABAI, D., «Valentin Poénaru's Program for the Poincaré Conjectures, in YAU, S. T. (a cura di),

Geometry, Topology and Physics for Raoul Bott, International Press, Cambridge 1994, pp. 139-66.
GAGE, M. — HAMILTON, R. S., *The Heat Equation Shrinking Convex Plane Curves,* «Journal of Differential Geometry» 23, 1986, pp. 69-96.
GALISON, P., *Einstein's Clocks, Poincaré's Maps: Empires of Time,* W. W.Norton, New York 2003 (trad. it. *Gli orologi di Einstein, le mappe di Poincaré: imperi del tempo,* Raffaello Cortina, Milano 2004).
GALLOT, S. — HULIN, D. — LAFONTAINE, J., *Riemannian Geometry,* 3ª ed., Springer-Verlag, Berlino 2004.
GAUSS, C. F.J. *Werke,* K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Gottinga 1863-1933.
—, *Briefwechsel zwischen Carl Friedrich Gauss und Wolfgang Bolyai,* B. G. Teubner, Lipsia 1899.
GILLISPIE, C. C. (a cura di), *Dictionary of Scientific Biography,* Scribner, New York 1971.
GILLMAN, D. — ROLFSEN, D., *The Zeeman conjecture for Standard Spines Is Equivalent to the Poincaré Conjecture,* «Topology» 22, 1983, pp. 315-23.
GLEICK, J., *Chaos: Making a New Science,* Penguin, New York 1988 (trad. it. *Caos: la nascita di una nuova scienza,* BUR, Milano 2005).
GOLDBERG, L. — PHILLIPS, A. V. (a cura di), *Topological Methods in Modem Mathematics,* Publish or Peristi Press, Houston 1993.
GORDON, C. MCA., «3-Dimensional Topology up to 1960», in JAMES, I. M. (a cura di), *History of Topology,* Elsevier, Amsterdam 1999, pp. 449-90.
GORMAN, P., *Pythagoras: A Life,* Routledge & K. Paul, Londra-Boston 1979.
GRAY, J., *Ideas of Space: Euclidean, Non-Euclidean, and Relativistic,* Oxford University Press, Oxford-New York 1979.
GRAY, J. J. — WALTER, S. A. (a cura di), *Henri Poincaré, Three Supplementary Essays on the Discovery of Fuchsian Functions,* Akademie Verlag GmbH, Berlino-Albert Blanchard, Parigi 1997.
GRAYSON, M., *The Heat Equation Shrinks Embedded Curves to Round Points,* «Journal of Differential Geometry» 26, 1987, pp. 285-314.
GREFFE, J. L. — HEINZMANN, G. — LORENZ, K. (a cura di), *Henri Poincaré, Science and Philosophy,* Akademie Verlag GmbH, Berlino-Albert Blanchard, Parigi 1996, pp. 241-50.
HADAMARD, J., *L'Oeuvre Mathématique de Poincaré,* «Acta Mathematica» 38, 1921, pp. 203-87. —, *Non-Euclidean Geometry in the Theory of Automorphic Functions,* trad. ingl. di A. Shenitzer, a cura di J. J. Gray e A. Shenitzer, American Mathematical Society, Providence 1999.
HAKEN, W., «Some Results on Surfaces in 3-Manifolds», in HILTON, P., *Studies in Modern Topology,* MAA Studies, Mathematical Association of America, Washington 1968.
HALSTED, G. B., *Biography, Bolyai Farkas [Wolfgang Bolyai],* «American Mathematical Monthly» 3, 1896, pp. 1-5.
HAMILTON, R. S., *Three-Manifolds with Positive Ricci Curvature,* «Journal of Differential Geometry.. 17, 1982, pp. 255-306.
—, *The Ricci Flow on Surfaces,* «Contemporary Mathematics.. 71, 1988, pp. 237-61.
—, *The Formation of Singularities in the Ricci Flow,* «Surveys in Differential Geometry.. 2, 1995, pp. 7-136.
HASKINS, C. H., *The Rise of Universities,* Gordon Press, New York 1957.
HEATH, T. L., *A History of Greek Mathematics, 2* voll, Oxford 1921.
—, *The Thirteen Books of Euclid's Elements,* Dover, New York 1956 (per una traduzione italiana degli *Elementi di* Euclide, si veda EUCLIDE, *Gli elementi,* a cura di A. Frajese e M. Maccioni, UTET, Torino 1970).
HEEGAARD, P., *Forstudier til en topologisk teori for de algebraiske fladers sommenhceng,* «Der Nordiske Forlag»., Copenhagen 1898.
HEINZMANN, G., Élements *preparatoires à une biographic d'Henri Poincaré,* «Les Annales de l'Est» 51, n. 1, 2001, pp. 103-17.

HEMPEL, J., *3-Manifolds,* Princeton University Press, Princeton 1976.
HEYERDAHL, T., *Early Man and the Ocean: A Search for the Beginnings of Navigation and Seaborne Civilizations,* Doubleday, Garden City (NY) 1979.
HILBERT, D., *Die Grundlagen der Geometric,* Teubner, Lipsia 1899 (trad. it. *Fondamenti della geometria,* Feltrinelli, Milano 1970).
IRVING, W., *Life and Voyages of Columbus,* John Murray, Londra 1830 (trad. it. *Storia della vita e viaggi di Cristoforo Colombo scritta da Washington Irving americano,* Tipografia Coen, Firenze 1829-30).
JAFFE, A., *The Millennium Grand Challenge in Mathematics,* «Notices of the American Mathematical Society.. 53, giugno 2006, pp. 652-60.
JAFFE, A. — QUINN, F., *Theoretical Mathematics: Towards a Cultural Synthesis of Mathematics and Theoretical Physics,* «Bulletin of the American Mathematical Society» 29, 1993, pp. 1-13.
—, *Response to comments on «Theoretical Mathematics»,* «Bulletin of the American Mathematical Society» 30, 1994, pp. 208-11.
JAKBSCHE, W., *The Bing-Borsuk Conjecture Is Stronger than the Poincaré Conjecture,* «Fundamenta Mathematicae) 106, 1980, pp. 127-34.
JAMES, I. M. (a cura di), *History of Topology,* Elsevier, Amsterdam 1999.
JOHNS, A., *The Nature of the Book: Print and Knowledge in the Making,* University of Chicago Press, Chicago 1998.
KAGAN, V., *N. Lobachevsky and His Contribution to Science,* Foreign Languages Publishing House, Mosca 1957.
KERVAIRE, M., *A manifold which does not admit any differentiable structure,* «Commentarii Mathematici Helvetici» 34, 1960, pp. 257-70.
KLEIN, F., *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19 Jahrhundert,* Springer-Verlag, Berlino 1926 (tomo I) e 1927 (tomo II).
KLEINER, B. — LOTT, J. (a cura di), *Notes and Commentaries on Perelman's Ricci Flow Papers,* www.math.lsa.umich.edu/~lott/ricciflow/perelman.html.
—, *Notes on Perelman's Papers,* arXiv:math.DG/0605667vl, 25 maggio 2006.
KLÜGEL, G. S., *Conatum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrandi recensio,* s.L, 1763, p. 16.
KOLMOGOROV, A., *The Moscow School of Topology,* «Science» 97, n. 2530, 1943, pp. 579-80.
KOSEKI, K., *Poincarésche Vermutungin Topologie,* «Mathematical Journal of Okayama University» 8, 1958, pp. 1-106.
KOSINSKI, A., *Differential Manifolds,* Academic Press, New York 1993.
LAMBERT, H., *Theorie der Parallellinien,* s.L, 1788.
LAUGWITZ, D., *Bernhard Riemann 1826-1866: Turning Points in the Conception of Mathematics,* trad, ingl., Birkhauser, Boston 1999 (tit. orig. *Bernhard Riemann 1826-1866: Wendepunkte in der Auffassung der Mathematik,* Birkhauser, Basilea 1996).
LEFSCHETZ, S., *Reminiscences of a Mathematical Immigrant in the United States,* «American Mathematical Monthly» 77, 1970, pp. 344-50.
—, «James Waddell Alexander (1888-1971)», in *Yearbook of the American Philosophical Society (1973),* Philadelphia 1974, pp. 110-14.
LEGENDRE, A. M., É*lements de géométrie,* s.L, 1794. LISTING, B., *Vorstudien zur Topologie,* s.L, 1847.
MAWHIN, J.*, Henri Poincaré. A Life in the Service of Science,* «Notices of the American Mathematical Society» 52, 2005, pp. 1036-44.
MCMULLEN, C., *Riemann Surfaces and the Geometrization of 3-Manifolds,* «Bulletin of the American Mathematical Society» 27, 1992, pp. 207-16.
MILNOR, J., *On the Total Curvature of Knots,* «Annals of Mathematics» 52, 1950, pp. 248-57.
—, *On Manifolds Homeomorphic to the 7-Sphere,* «Annals of Mathematics» 64, 1956, pp. 399-405.
—, *Singular Points of Complex Hypersurfaces,* Princeton University Press, Princeton 1968.

—, *Towards the Poincaré Conjecture and the Classification of Three-Manifolds,* «Notices of the American Mathematical Society» 50, n. 10, 2003, pp. 1226-33.
—, *The Poincaré Conjecture One Hundred Years Later,* www.math.suny-sb.edu/-jack.
MONASTYRSKY, M., *Modern Mathematics in the Light of the Fields Medals,* AK Peters, Wellesley 1998.
MORGAN, J. W., *Recent Progress on the Poincaré Conjecture and the Classification of 3-Manifolds,* «Bulletin of the American Mathematical Society» 42, 2005, pp. 57-78.
MORGAN, J. W. — TIAN, G., *Ricci Flow and the Poincaré Conjecture,* math.DG/0607607, 25 luglio 2006.
NAKAYAMA, S., *Academic and Scientific Traditions in China, Japan and the West,* trad. ingl. di J. Dusenbury, University of Tokyo Press, Tokyo 1984 (tit. orig. *Rekishi toshite no gakumon,* Tokyo 1974).
NASAR, S., *A Beautiful Mind,* Simon & Schuster, New York 1998 (trad, it. Il *genio dei numeri. Storia di john Nash, matematico e folle,* Rizzoli, Milano 2000).
NASAR, S. — GRUBER, D., *Manifold Destiny: A Legendary Problem and the Battle over Who Solved It,* «The New Yorker», 28 agosto 2006, pp. 44-58.
NASH, J., *The Imbedding Problem for Riemannian Manifolds,* «Annals of Mathematics» 63, 1956, pp. 20-63.
NEUGEBAUER, O., *Mathematical Cuneiform Texts,* American Oriental Society, New Haven 1945.
—, *The Exact Sciences in Antiquity,* Princeton University Press, Princeton 1952.
—, *Vorlesungen über Geschichte der antiken mathematischen Wissenschaf ten,* Springer-Verlag, Berlino-New York 1969.
NOVIKOV, S. P., *Topology in the 20th century: A View from the Inside,* «Russian Mathematical Surveys» 59, 2004, pp. 3-28.
O'CONNOR, J. J. - ROBERTSON, E. F., *The Mac Tutor History of Mathematics Archive,* www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/index.html.
O'SHAUGHNESSY, P., *A Case of lies,* Random House, New York 2005.
OSSERMAN, R., *Poetry of the Universe,* Doubleday, Garden City (NY) 1995 (trad. it. *Poesies dell'universo: l'esplorazione matematica del cosmo,* TEA, Milano 2000).
OTAL, J. P., «Thurston's hyperbolization of Haken manifolds», in HSIUNG, C. C. — YAU, S.—T. (a cura di), *Surveys in Differential Geometry,* International Press, Cambridge 1998, vol. 3, pp. 77-194.
PAPAKYRIAKOPOULOS, C. D., *On Dehn's lemma and the Asphericity of Knots,* «Proceedings of the National Academy of Sciences» 43, 1957, pp. 169-72, e «Annals of Mathematics» *66,* 1957, pp. 1-26.
—, *On Solid Tori,* «Proceedings of the London Mathematical Society» 3, ser. 7, 1957, pp. 281-99.
—, *Some Problems on 3-Dimensional Manifolds,* «Bulletin of the American Mathematical Society» *64,* 1958, pp. 317-35.
—, *A Reduction of the Poincaré Conjecture to group theoretic conjectures,* «Annals of Mathematics» *77,* 1963, pp. 250-305.
PARSHALL, K. H. — ROWE, D. E., *The Emergence of the American Mathematical Community 1876-1900: J. J. Sylvester, Felix Klein, and E. H. Moore,* American Mathematical Society-London Mathematical Society, Providence-London 1994.
PARSHALL, K. H. — RICE, A. C. (a cura di), *Mathematics Unbound: The Evolution of an International Mathematical Research Community, 1800-1945,* American Mathematical Society-London Mathematical Society, Providence-London 2002.
PERELMAN, G., *Proof of the Soul Conjecture of Cheeger and Gromoll,* «Journal of Differential Geometry» 40, 1994, pp. 299-305.
—, *The Entropy Formula for the Ricci Flow and Its Geometric Applications,* math.DG/0211159, 11 novembre 2002; *Ricci Flow with Surgery on Three-Manifolds,* math.DG/0303109, 10 marzo 2003; *Finite Extinction Time for the Solutions to the Ricci Flow on*

Certain Three-Manifolds, math.DG/0307245, 17 luglio 2003. Tutti reperibili all'indirizzo www.arXiv.org.

PETERSON, M., *Dante and the 3-Sphere,* «American Journal of Physics» 47, 1979, pp. 1031-35.

POINCARÉ, H., *Sur les Fonctions Fuchsiennes,* «Comptes rendus de l'Académie des sciences» 92, 14 febbraio 1881, pp. 333-35; 93, 21 febbraio 1881, pp. 395-96; 94, 4 aprile 1881, pp. 859-61.

—, *Papers on Fuchsian Functions,* trad. ingl. di J. Stillwell, Springer-Verlag, New York 1985.

—, *New Methods of Celestial Mechanics,* a cura di D. Goroff, American Institute of Physics, New York 1993 (tit. orig. *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste,* 3 Tomi, Gauthier-Villars, Parigi 1892-99).

—, *The Value of Science: Essential Writings of Henri Poincaré,* a cura di Stephen Jay Gould, The Modern Library (Random House), New York 2001 (il volume raccoglie le traduzioni inglesi di *La Science et l'hypothèse* [Flammarion, Parigi s.d.], *La valeur de la science* [Flammarion, Parigi 1905], e *Science et Méthode* [Flammarion, Parigi 1908]; per le traduzioni italiane si vedano, rispettivamente, *La scienza e l'ipotesi,* La Nuova Italia, Firenze 1950; Il *valore della scienza,* La Nuova Italia, Scandicci 1994; *Scienza e metodo,* Einaudi, Torino 1997).

—, *L'état actuel et l'avenir de la physique mathematique,* «Bulletin des sciences mathématiques» 28, 1904, pp. 302-24.

—, *et al, Œuvres de Henri Poincaré,* Gauthiers-Villars, Parigi 1952.

PONT, J. C., *La Topologie Algébrique des origines à Poincaré,* Presses Universitaires de France, Parigi 1974.

REGO, E. — ROURKE, C, *Heegaard Diagrams and Homotopy 3-Spheres,* «Topology» 27, 1988, pp. 137-43.

REID, C., *Hilbert,* Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlino 1970. —, *Courant in Göttingen and New York, The Story of an Improbable Mathematician,* Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlino 1976.

RIEMANN, B., *Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass,* 2ª ed., a cura di Heinrich Weber, Teubner, Lipsia 1892.

ROURKE, *C, Characterisation of the Three-Sphere following Haken,* «Turkish Journal of Mathematics» 18, 1994, pp. 60-69.

—, *Algorithms to Disprove the Poincaré Conjecture,* «Turkish Journal of Mathematics» 21, 1997, pp. 99-110.

ROWE, D. E., *«Jewish Mathematics» at Göttingen in the Era of Felix Klein,* «Isis» *77,* 1986, pp. 422-49.

—, *Klein, Hilbert and the Göttingen Mathematical Tradition,* «Osiris» 5, n. 2, 1989, pp. 186-213.

RUSSELL, J. B., *Inventing the Flat Earth: Columbus and Modern Historians,* Praeger Publishing, Westport 1991.

RUSSO, L., *La rivoluzione dimenticata: il pensiero scientifico greco e la scienza moderna,* Feltrinelli, Milano 1997.

SAARI, D. G. (a cura di), *The Way It Was: Mathematics from the Early Years of the «Bulletin»,* American Mathematical Society, Providence 2003.

SABBAGH, K., *The Riemann Hypothesis: The Greatest Unsolved Problem in Mathematics,* Farrar-Straus-Giroux, New York 2002.

SARKARIA, K. S., «The Topological Work of Henri Poincaré», in JAMES, I. M. (a cura di), *History of Topology,* Elsevier, Amsterdam 1999, pp. 123-68.

SCHOLZ, E., «The Concept of a Manifold, 1850-1950», in JAMES, I. M. (a cura di), *History of Topology,* Elsevier, Amsterdam 1999, pp. 25-64.

SEIFERT, H. — THRELFALL, W., *A Textbook of Topology,* trad. ingl. di M. A. Goldman, Academic Press, New York 1980 (titolo originale *Lehrbuch der Topologie,* Lipsia 1934).

SMALE, S., *The Generalized Poincaré Conjecture in Dimensions Greater than Four,* «Annals of Mathematics» 74, 1961, pp. 391-406.

SOSSINSKY, A., *Knots: Mathematics with a Twist,* trad. ingl. di G. Weiss, Harvard University

Press, Cambridge (MA) 2002 (trad. it. *Nodi: genesi di una teoria matematica,* Bollati Boringhieri, Torino 2000).
STALLINGS, J., *On the Loop Theorem,* «Annals of Mathematics» 72, 1960, pp. 12-19.
STALLINGS, J. R., «How not to Prove the Poincaré Conjecture», in *Topology Seminar, Wisconsin 1965,* «Annals of Mathematical Studies» 60, 1966, pp. 83-88.
STILLWELL, J., *Geometry of Surfaces,* Springer-Verlag, New York 1992.
THICKSTUN, T. L., *Taming and the Poincaré Conjecture,* «Transactions of the American Mathematical Society» 238, 1978, pp. 385-96.
—, *Open Acyclic 3-Manifolds, a Loop Theorem and the Poincaré Conjecture,* «Bulletin of the American Mathematical Society» 4, 1981, pp. 192-94.
THOM, R., *Mathematical Models of Morphogenesis,* trad. ingl. di W. M. Brookes, Halsted Press, New York 1983 (trad. it. *Modelli matematici della morfogenesi,* Einaudi, Torino 1985).
THRELFALL, W. — SEIFERT, H., *Topologische Untersuchung der Discontinuitätsbereiche endlicher Bewegungsgruppen der dreidimensionalen sphärische Raumes I,* «Mathematische Annalen» 104, 1930, pp. 1-70.
THURSTON, W. P., *Existence of codimension-one foliations,* «Annals of Mathematics» 104, 1976, pp. 249-68.
—, *Mathematical Education,* «Notices of the American Mathematical Society» 37, 1990, pp. 844-50.
—, *How to See 3-Manifolds,* «Classical and Quantum Gravity» 15, 1994, pp. 2545-71.
—, *On Proof and Progress in Mathematics,* «Bulletin of the American Mathematical Society» 30, 1994, pp. 161-77.
—, *Three-Dimensional Geometry and Topology,* vol. 1, a cura di S. Levy, Princeton University Press, Princeton 1997.
—, *The Geometry and Topology of Three-Manifolds,* versione elettronica 1.1, marzo 2002, www.msri.org/publications/books/gt3m.
TIETZE, H., *Über die topologischen Invarianten mehrdimensional Mannigfaltigkeiten,* «Monatshefte für Mathematik und Physik» 19, 1908, pp. 1-118.
TOLOMEO, C., *Claudius Ptolemy, The Geography,* trad. ingl. e cura di E. L. Stevenson, Dover, New York 1991 (per una traduzione italiana, si veda *Geografia di Claudio Tolomeo Alessandrino,* Venezia 1598).
VAN DER WAERDEN, B. L., *Science Awakening I: Egyptian, Babylonian, and Greek Mathematics,* trad. ingl. di A. Dresden con aggiunte dell'autore, Noordhooff, Leida 1975 (tit. orig. *Ontwakende Wetenschap, Egyptische, Babylonische en Griekse Wiskunde,* Noordhooff, Gröningen 1950).
VEBLEN, O., *Theory on plane curves in non-metrical analysis situs,* transactions of the American Mathematical Society» 6, 1905, pp. 83-98.
—, *Analysis Situs,* American Mathematical Society, New York 1922.
WEBER, C. — SEIFERT, H., *Die beiden Dodekaedräume,* «Mathematische Zeitschrift» 37, n. 2, 1933, p. 237.
WEEKS, J., *The Shape of Space: How to Visualize Surfaces and Three-Dimensional Manifolds,* 2ª ed., Marcel Dekker, New York-Basilea 2002.
—, *The Poincaré Dodecahedral Space and the Mystery of the Missing Fluctuations,* «Notices of the American Mathematical Society» 51, 2004, pp. 610-19.
WEIL, A., *Riemann, Betti, and the Birth of Topology,* «Archive for History of Exact Sciences» 20, 1979, pp. 9-96.
WHITEHEAD, A. N., *The Aims of Education and other Essays,* Macmillan, New York 1967, p. 93 (trad. it. *I fini dell'educazione e altri saggi,* La Nuova Italia, Scandicci 1992).
WHITEHEAD, J. H. C, *Certain Theorems about Three-Dimensional Manifolds,* «Quarterly Journal of Mathematics» 5, 1934, pp. 308-20.
—, *Three-Dimensional Manifolds (Corrigendum),* «Quarterly Journal of Mathematics» 6, 1935, p. 80.
—, *On the Sphere in 3-Manifolds,* «Bulletin of the American Mathematical Society» *64,*1958, pp. 161-66.

Archivi

Archives Henri Poincaré, Université de Nancy 2. (Gran parte di questo utilissimo archivio è consultabile online all'indirizzo www.univ-nancy2.fr/poincare/.)
Centre Historique des Archives Nationales, Parigi (segnatura: AJ/16/6124).
Archives, Academie des Sciences, Parigi.
Universitätsarchiv Göttingen (wwwuser.gwdg.de/-uniarch/).

Letture consigliate

Ecco un breve elenco di suggerimenti per ulteriori letture. Le citazioni complete dei testi di seguito indicati sono riportate nella bibliografia.

Per quanto riguarda le biografie dei matematici, la miglior opera generale a cui fare riferimento è il *Dictionary of Scientific Biography* di C. C. Gillispie. In internet è poi possibile consultare il sito web «MacTutor History», curato da J. J. O'Connor ed E. F. Robertson (www.history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/index.html), che presenta una serie di brevi e brillanti biografie di molti matematici (oltre a contenere un buon numero di riassunti, scritti in modo chiaro e accessibile, di diverse questioni matematiche). Anche Wikipedia (it.wikipedia.org/wiki/, o la versione inglese en.wikipedia.org/wiki/) è piuttosto accurata e autorevole.

Per le singole biografie, si vedano quella di D. Laugwitz su Riemann, quella di W. K. Buhler su Gauss e quella di C. Reid su Hilbert. La lettura di alcune parti dei testi di Laugwitz e Buhler richiede una buona preparazione matematica. Al momento, non ci sono biografie critiche di Poincaré, anche se dovrebbe uscirne una nel 2010. Nel frattempo, il riassunto della vita e dell'opera di Poincaré presentato da U. Bottazzini (in francese) è piacevole e godibile. Il libro di P. Galison sul contesto sociale che influenzò l'opera di Poincaré e di Einstein è semplicemente splendido. Il tema delle organizzazioni sociali che sostengono la scienza e la matematica viene ulteriormente sviluppato nel volume di S. Nakayama.

Per chi possiede soltanto una preparazione matematica di base, il testo migliore sul rapporto fra geometria e topologia nel caso di varietà bi e tridimensionali è *The Shape of Space* di J. Weeks, opera che non richiede la conoscenza del calcolo infinitesimale.

I lettori con una preparazione più approfondita troveranno invece di grande utilità il libro di W. P. Thurston *Three-Dimensional Geometry and Topology* e gli appunti delle sue lezioni tenute a Princeton (consultabili online sul sito web del Mathematical Sciences Reserch Institute).

Il saggio di J. W. Cannon *et al.* (pubblicato in *Flavors of Geometry* di S. Levy) offre un'introduzione a diversi modelli differenti di geometria iperbolica, e risulta facilmente accessibile a chi abbia seguito un corso di calcolo infinitesimale.

Per un'introduzione di piacevole lettura alla teoria dei nodi, si vedano i libri di C. Adams o di A. Sossinsky, preferibilmente entrambi (dato che coprono aspetti differenti di tale teoria).

Per i lettori che abbiano seguito un biennio di calcolo infinitesimale all'università, il libro di A. Kosinski *Differential Manifolds* costituisce un'ottima, breve introduzione alla topologia differenziale. Anche D. Barden e C. Thomas hanno fatto un buon lavoro. Per quanto riguarda la

geometria riemanniana, raccomando la lettura di S. Gallot, D. Hulin e J. Lafontaine. Questi libri, comunque, richiedono un notevole impegno da parte del lettore (e, preferibilmente, la disponibilità di qualcun altro con cui studiarli).

L'articolo di Richard Hamilton del 1995, *The Formation of Singularities in the Ricci Flow* (ristampato in H.-D. Cao *et al., Collected Papers on the Ricci Flow),* costituisce probabilmente il miglior punto di partenza per studiare il flusso di Ricci. Il libro in corso di pubblicazione di Tian e Morgan presenterà poi un'esposizione completa e dettagliata del lavoro di Perelman e della dimostrazione della congettura di Poincaré.

Ringraziamenti

Questo libro è nato da una conversazione che ho avuto qualche estate fa, davanti a una bottiglia di vino, nel cortile della casa di mio fratello Stephen e di sua moglie, Jill Perlman. Steve, che era totalmente immerso nelle guerre medioevali fra cristiani e musulmani, mi chiese che cosa c'era di nuovo nel mondo della matematica. Gli raccontai dell'articolo che Grisha Perelman aveva pubblicato su internet, delle sue conferenze, della curiosità con cui erano state accolte, della congettura di Poincaré e della possibilità che la dimostrazione di Perelman reggesse. Steve sottolineò che questa storia sarebbe potuta diventare l'argomento di un buon libro, e che io avrei potuto mettermi a scriverlo. Mi disse che lui perlomeno l'avrebbe letto e che il suo editore, George Gibson, avrebbe potuto esserne interessato. Pur essendo nel frattempo impegnato a lanciare il suo ultimo volume, *Sea of Faith,* Steve ha letto le bozze di questo mio scritto e mi ha dato numerosi consigli.

Ho un debito ancora più grande con la meravigliosa Mary: mia moglie, migliore amica e simpatica compagna di viaggio. E stata lei a suggerirmi di prendere un anno sabbatico per dedicarmi completamente alla stesura del libro. E stata la prima a leggerlo e a farne una critica spietata, tagliando sistematicamente le espressioni pretenziose e l'eccessiva verbosità. Anche i miei figli mi sono stati di grandissimo sostegno con le loro critiche costruttive. Seamus e Sarah hanno letto il manoscritto quand'era ancora a un livello embrionale, e i loro consigli mi hanno spinto a rivedere completamente i capitoli d'apertura. Brendan e Kathleen ne hanno lette alcune parti, chiedendomi spesso come procedevano i lavori e spronandomi con il loro entusiasmo. Ringrazio anche mio fratello Kevin, mio padre, il padre di Mary e tutti i membri della mia grande famiglia per il supporto — e, in alcuni casi, le critiche — che mi hanno offerto.

Ho la fortuna di avere dei colleghi straordinari al Mount Holyoke College e nella comunità matematica. Tra loro, Joanne Creighton, rettrice del college e docente di inglese, mi ha incoraggiato, mi ha dato la possibilità di prendere un anno sabbatico e ha letto il mio manoscritto. Penny Gill, docente di scienze politiche, ha svolto le funzioni di decano durante la mia assenza. Lei e Sally Sutherland (mia collega di decanato e studiosa di Shakespeare) hanno coperto le molte ore che ho dovuto trascorrere lontano dall'aula. Sally e la mia assistente Susan Martin mi hanno inoltre offerto un perfetto supporto logistico. David Cox dell'Amherst College, Harriet Pollatsek e Nicole Vaget del Mount Holyoke e Ron Davidoff hanno letto una prima versione, alquanto imbarazzante, del mio manoscritto, e l'hanno ampiamente migliorata. Andy Lass e George Cobb mi hanno offerto una serie di commenti dettagliati su una bozza successiva, meno imbarazzante ma ancora ben lontana dalla versione finale. Ringrazio Lester Senechal, Mark Peterson, Jane Crosthwaite, Giuliana Davidoff, Jillian McLeod e Char Morrow per le loro benevole letture. La mia gratitudine va anche a James Carlson, Alan Durfee, Peter Lax e Jeff Weeks, i cui commenti mi hanno salvato da molti errori. Inutile dire che la colpa per le inesattezze rimaste è soltanto mia.

Probabilmente, non avrei mai neppure preso in considerazione l'idea di dedicarmi a questo

progetto se non fosse stato per un invito di Chris Benfey e Karen Remmler (allora codirettori del Centro Weissman per la leadership e le arti liberali del Mount Holyoke), che alcuni anni fa — in occasione di un simposio — mi chiesero di parlare del matematico francese Jacques Hadamard a un uditorio di non-matematici. Anche se scrivere di matematica per un pubblico di profani fu più difficile di quanto non pensassi, mentre preparavo l'intervento scoprii che la cosa mi piaceva, e trovai molto interessante anche il lavoro d'archivio. Karen e Chris hanno incoraggiato passo dopo passo il mio nascente interesse, dandomi una serie di utili consigli sia per quell'intervento, sia — in seguito — per la stesura di questo libro. Bob Schwartz mi ha aiutato moltissimo a orientarmi fra gli archivi francesi. Parte delle ricerche archivistiche di questo progetto sono state finanziate con una sovvenzione del college. Questi finanziamenti, e quelli legati alla cattedra di cui sono titolare, non sarebbero stati possibili senza il sostegno e l'impegno delle ex studentesse del college.

Sono molto riconoscente ai dipartimenti di matematica dell'Università di Miami e dell'Università di Edimburgo per la calorosa ospitalità che mi hanno riservato, rispettivamente nel semestre autunnale del 2004 e in quello primaverile del 2005. Il preside del dipartimento di Miami, Alan Zame, e i suoi assistenti, Dania Puerto e Toni Taylor, mi sono stati di grande aiuto. A Edimburgo, Elmer Rees mi ha fornito disponibilità, consulenza matematica e incoraggiamento.

Ho ricevuto molta assistenza anche sul piano tecnico. Gli archivisti Edith Pirio (del Centro storico degli archivi nazionali di Parigi), Florence Greffe (dell'Accademia delle scienze di Parigi) e Ulrich Hunger (della Biblioteca della Bassa Sassonia e dell'Università di Gottinga) mi sono stati di incredibile aiuto. Alcuni dei materiali su Poincaré che avevo richiesto non erano facilmente accessibili in quanto erano stati archiviati assieme ai documenti di un'altra persona. La prospettiva di dover fare un altro viaggio a Parigi per ottenere i documenti che mi servivano era molto scoraggiante; Edith Pirio, però, si è fatta carico di fotocopiarli e me li ha spediti a Edimburgo, senza che io le chiedessi nulla. Non potrò mai ringraziarla abbastanza. Eli Gottlieb ha corretto — in generale e nel dettaglio — una prima bozza del libro. E Hernstadt mi ha dato ragguagli riguardo alle questioni contrattuali. George Gibson e Jackie Johnson, della Walker & Company, sono stati insostituibili. In particolare, il lavoro di revisione di Jackie è stato straordinario e le sue correzioni molto pertinenti.

Ringrazio i miei genitori, Anne e Daniel, che hanno lavorato molto per permettere a me e ai miei fratelli Kevin e Stephen di proseguire negli studi, cosa che loro non avevano avuto la possibilità di fare. Hanno saputo creare una famiglia piena d'affetto in cui nulla era impossibile e dove ci scambiavamo liberamente le nostre idee. Ho scritto i primi due capitoli di questo libro all'ospedale Montfort di Ottawa, mentre sedevo di fianco a mio padre accanto al letto di morte di mia madre. Penso che il risultato di questo mio lavoro le sarebbe piaciuto, e vorrei che fosse ancora viva per poterlo leggere.